Von besonderem Interesse für uns und für viele Anwendungen sind quadratische Matrizen bzw. Gleichungssysteme mit genauso vielen Unbekannten wie Gleichungen. Wie wir bereits im vorhergehenden Kapitel gesehen haben, muss eine Matrix A quadratisch sein, damit alle zugehörigen Gleichungssysteme $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (für jedes mögliche $\boldsymbol{b}$) eine eindeutige Lösung besitzen. In diesem Kapitel werden wir jeder quadratischen Matrix in subtiler Weise einen Skalar, ihre Determinante, zuordnen. Diese erlaubt uns, die Frage nach der eindeutigen Lösbarkeit allgemein zu entscheiden, und sie hilft uns auch, diese Lösung gegebenfalls zu finden.

Determinanten waren wohl im Prinzip schon *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716) bekannt. Wiederentdeckt und weiterentwickelt wurden sie vom Schweizer Mathematiker *Gabriel Cramer* (1704–1752). Beiträge zur Determinantentheorie stammen auch von dem englischen Mathematiker *Charles Lutwidge Dodgson* (1832–1898), der allerdings besser als Lewis Carroll und für seine Kinderliteratur (etwa *Alice im Wunderland*) bekannt ist.

13.1 Determinanten einer 2×2- und einer 3×3-Matrix

Der einfachste Fall eines linearen Gleichungssystems ist natürlich der einer einzigen Gleichung in einer Unbekannten,

$$a \cdot x = b\,. \tag{13.1}$$

In dieser Situation ist die Lage offensichtlich: Genau dann hat (13.1) für jede Wahl von b eine eindeutige Lösung, wenn $a \neq 0$; in diesem Fall ist $x = \frac{b}{a}$ die eindeutige Lösung.

Unser Ziel ist es, diese Aussage in möglichst großem Umfang auf beliebige $n \times n$-Matrizen zu verallgemeinern.

Die Determinante einer 2×2-Matrix ist einfach

Wir wollen uns zunächst mit dem Spezialfall $n = 2$ beschäftigen, dem nach Gl. (13.1) einfachsten Fall. Ein solches Gleichungssystem hat die allgemeine Gestalt

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= u \\ cx_1 + dx_2 &= v\,. \end{aligned} \tag{13.2}$$

Wenn wir versuchen, dieses Gleichungssystem nach den Eliminationsmethoden von Gauß zu lösen, kommen wir schnell auf Fallunterscheidungen (der Fall $a = 0$ wird anders behandelt als der Fall $a \neq 0$). Wir wollen versuchen, ohne diese Fallunterscheidung auszukommen, und multiplizieren die erste Gleichung mit d und die zweite mit b. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} dax_1 + dbx_2 &= du \\ bcx_1 + bdx_2 &= bv\,, \end{aligned} \tag{13.3}$$

wobei wir aber beachten müssen, dass das erhaltene Gleichungssystem nicht mehr äquivalent zum Ausgangssystem ist, wenn $d = 0$ oder $b = 0$. Subtrahieren wir nun die zweite Gleichung von der ersten, so heben sich die x_2-Terme weg und wir erhalten die Gleichung

$$(ad - bc)\,x_1 = du - bv\,. \tag{13.4}$$

Falls jetzt $ad - bc \neq 0$, so hat diese Gleichung, wie wir schon im Spezialfall $n = 1$ gesehen haben, die eindeutige Lösung

$$x_1 = \frac{du - bv}{ad - bc}\,.$$

Multiplizieren wir dagegen die erste Gleichung (von (13.2)) mit c und die zweite mit a, so erhalten wir ein Gleichungssystem, aus dem sich mit ähnlichen Überlegungen

$$x_2 = \frac{av - cu}{ad - bc}$$

als eindeutigen Wert für x_2 ergibt (falls wieder $ad - bc \neq 0$). Setzen wir diese Werte in das ursprüngliche Gleichungssystem (13.2) ein, so rechnen wir leicht nach, dass auch dieses durch x_1 und x_2 gelöst wird (unabhängig davon, ob $b \neq 0$ oder $d \neq 0$). Damit haben wir also im Fall $ad - bc \neq 0$ eine Lösung von Gleichungssystem (13.2) gefunden. Wenn $b = 0$ oder $d = 0$, so ist zwar das transformierte Gleichungssystem (13.3) nicht äquivalent zum ursprünglichen Gleichungssystem (13.2), allerdings kann sich durch solche Transformationen die Anzahl der Lösungen höchstens vergrößern; jede Lösung von Gleichungssystem (13.2) ist auch eine Lösung von Gleichungssystem (13.3). Entsprechendes gilt, wenn wir die Gleichungen mit c bzw. a mutiplizieren.

Da wir aber x_1 und x_2 eindeutig aus den transformierten Gleichungssystemen ermittelt haben, folgt: Falls $ad - bc \neq 0$, so hat das Gleichungssystem (13.2) für jede Wahl von u und v eine eindeutig bestimmte Lösung, die gegeben wird durch

$$x_1 = \frac{du - bv}{ad - bc}\,, \qquad x_2 = \frac{av - cu}{ad - bc}\,.$$

Es bleibt noch der Fall $ad - bc = 0$ zu betrachten. In diesem Fall hat die Gl. (13.4) keine Lösung, falls $bv - du \neq 0$ und damit kann auch Gleichungssystem (13.2) keine Lösung haben. Falls $bv - du = 0$, so wird Gl. (13.4) durch jedes $x_1 \in \mathbb{R}$ gelöst. Ist zusätzlich $b \neq 0$, so können wir $c = \frac{ad}{b}$ und $v = \frac{du}{b}$ schreiben, und Gleichungssystem (13.2) wird zu

$$\begin{aligned} ax_1 \quad + bx_2 &= u \\ \tfrac{da}{b} \cdot x_1 + dx_2 &= \tfrac{du}{b}\,, \end{aligned} \tag{13.5}$$

so dass die zweite Gleichung das $\frac{d}{b}$-fache der ersten ist, weshalb nur die erste gelöst werden muss. Da sich die erste Gleichung (wegen $b \neq 0$) für jede Wahl von x_1 eindeutig nach x_2 auflösen lässt, hat Gleichungssystem (13.5) (und damit auch Gleichungssystem (13.2)) unendlich viele Lösungen. Eine analoge Überlegung können wir im Fall $d \neq 0$ anstellen.

Falls $b = 0$ und $d = 0$, so gibt es keine Lösung von Gleichungssystem (13.2), es sei denn, x_1 kann so gewählt werden, dass $ax_1 = u$ und $cx_1 = v$. In diesem Fall löst dann wieder jede

Wahl von x_2 das Gleichungssystem (13.3), und wir haben erneut unendlich viele Lösungen.

Betrachten wir im Fall $ad - bc = 0$ speziell das homogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= 0 \\ cx_1 + dx_2 &= 0\,, \end{aligned} \tag{13.6}$$

so ist hier die Bedingung $bv - du = 0$ immer erfüllt, und obige Überlegungen zeigen, dass Gleichungssystem (13.6) immer unendlich viele Lösungen hat.

Eine entscheidende Bedeutung bei den Untersuchungen zur Lösbarkeit kommt also dem Ausdruck $ad - bc$ zu, den wir daher besonders betrachten wollen.

Definition

Die **Determinante** $\det A$ einer 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

ist der Ausdruck

$$\det A = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}\,.$$

Wir schreiben auch

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$$

für die Determinante von A, falls die Einträge der Matrix explizit bekannt sind.

Beispiel

1. Für die 2×2-Einheitsmatrix E_2 gilt
$$\det E_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1\,.$$
2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2.$
3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 2 \cdot 4 = 0.$ ◀

In unseren Vorüberlegungen haben wir für die Determinante schon das folgende Resultat abgeleitet.

Die cramersche Regel

Ist A eine 2×2-Matrix, so hat das Gleichungssystem

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

genau dann eine eindeutige Lösung für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$, wenn $\det A \neq 0$. Diese eindeutige Lösung berechnet sich als

$$x_1 = \frac{a_{2,2}b_1 - a_{1,2}b_2}{\det A}\,, \qquad x_2 = \frac{a_{1,1}b_2 - a_{2,1}b_1}{\det A}\,.$$

Beispiel

Betrachten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 4\,, \end{aligned}$$

so gilt für die Koeffizientenmatrix A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$$

Insbesondere ist also $\det A \neq 0$, und damit hat jedes Gleichungssystem

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

eine eindeutige Lösung. In unserer Situation ist das

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{4 \cdot 2 - 2 \cdot 4}{-2} = 0\,, \\ x_2 &= \frac{1 \cdot 4 - 3 \cdot 2}{-2} = 1\,. \end{aligned}$$

Natürlich führt auch der Gauß-Algorithmus zu diesem Ergebnis. ◀

Beispiel

Es gilt

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 4 - 4 = 0\,,$$

und damit gibt es für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ kein Gleichungssystem

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Teil III

mit einer eindeutigen Lösung. Betrachten wir das zugehörige homogene System

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 0\,, \end{aligned}$$

so hat dieses die Normalform

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

und damit einen eindimensionalen Lösungsraum (mit Basis $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$). Der Bildraum der Matrix ist dann nach dem Rangsatz ebenfalls eindimensional (mit Basis $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$), und daher hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 3 \end{aligned}$$

keine Lösung. ◄

Die Determinante einer 2×2-Matrix ist sehr einfach zu berechnen. Im Hinblick auf spätere Verallgemeinerungen wollen wir trotzdem schon in diesem Fall Formeln für Determinanten zusammen stellen, die die Berechnungen weiter vereinfachen. Unmittelbar aus der Definition erhalten wir bereits:

Ist A eine obere oder untere Dreiecksmatrix (ist also $a_{1,2} = 0$ oder $a_{2,1} = 0$), so gilt

$$\det A = a_{1,1} \cdot a_{2,2}\,.$$

Ist $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, so ist $A^\top = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, und wir sehen sofort:

Determinante der transponierten Matrix

Für eine 2×2-Matrix A ist $\det A = \det A^\top$.

Beispiel

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$ ◄

Besonders interessant ist die Frage, wann die Determinante einer Matrix verschwindet (also den Wert 0 hat), denn in diesem Fall sind die zugehörigen Gleichungssysteme nicht eindeutig lösbar. Ganz allgemein gilt

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ r \cdot a_{1,1} & r \cdot a_{1,2} \end{vmatrix} = r \cdot a_{1,1} \cdot a_{1,2} - r \cdot a_{1,1} \cdot a_{1,2} = 0\,,$$

und hieraus folgt (mit der Regel für transponierte Matrizen)

Verschwindungsaussagen

Für eine 2×2-Matrix A gilt schon $\det A = 0$, wenn

1. eine Zeile von A die Nullzeile ist,
2. eine Spalte von A die Nullspalte ist,
3. eine Zeile von A Vielfaches der anderen Zeile ist,
4. eine Spalte von A Vielfaches der anderen Spalte ist.

Wir wollen untersuchen, was passiert, wenn wir an A eine der Operationen durchführen, die benutzt werden, um A auf Zeilenstufenform zu bringen. Zuerst betrachten wir die Vertauschung von zwei Zeilen, etwa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$\det A' = 3 \cdot 2 - 0 \cdot 1 = 6 = -(1 \cdot 0 - 2 \cdot 3) = -\det A$$

oder, ganz allgemein,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{1,1} & a_{1,2} \end{vmatrix} &= a_{2,1}a_{1,2} - a_{1,1}a_{2,2} \\ &= -(a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}) \\ &= -\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Determinanten und Zeilenvertauschung

Entsteht die 2×2-Matrix A' aus A durch Vertauschen der beiden Zeilen, so gilt

$$\det A' = -\det A\,.$$

Das Gleiche gilt, wenn A' durch Vertauschung der Spalten aus A entsteht.

Nun wollen wir untersuchen, wie sich die Determinante verändert, wenn wir eine Zeile von A mit einer Zahl multiplizieren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\det A' = 4 \cdot 3 - 8 \cdot 1 = 4 = 4 \cdot (1 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = 4 \cdot \det A\,.$$

Allgemein erhalten wir

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} r \cdot a_{1,1} & r \cdot a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} &= ra_{1,1}a_{2,2} - ra_{1,2}a_{2,1} \\ &= r \cdot (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}) \\ &= r \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

und damit ist die folgende Aussage gezeigt.

Determinanten und Skalarmultiplikation

Entsteht die 2×2-Matrix A' aus A durch Multiplikation einer Zeile von A mit einer Zahl r, so gilt

$$\det A' = r \cdot \det A\,.$$

Das Gleiche gilt, wenn A' aus A durch Multiplikation einer Spalte von A mit einer Zahl r hervorgeht.

Ist $A' = r \cdot A$, so gilt

$$\det A' = r^2 \cdot \det A\,.$$

Bei der Behandlung von Gleichungssystemen ist eine wichtige Äquivalenzumformung die Addition des Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen. Interessant ist daher, wie sich das auf die Determinante auswirkt.

Beispiel

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

und addieren zur zweiten Zeile von A das Doppelte der ersten:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Dann erhalten wir

$$\det A' = 8 - 10 = -2 = 4 - 6 = \det A\,.$$ ◄

Ganz allgemein gilt für

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} + r \cdot a_{1,1} & a_{2,2} + r \cdot a_{1,2} \end{pmatrix}$$

und für ihre Determinanten

$$\begin{aligned}\det A' &= a_{1,1} \cdot (a_{2,2} + r \cdot a_{1,2}) - a_{1,2} \cdot (a_{2,1} + r \cdot a_{1,1}) \\ &= a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \\ &\quad + (a_{1,1} \cdot r \cdot a_{1,2} - a_{1,2} \cdot r \cdot a_{1,1}) \\ &= a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \\ &= \det A\,.\end{aligned}$$

Diese Betrachtung zeigt

Determinanten und Zeilenaddition

Entsteht die 2×2-Matrix A' aus A dadurch, dass wir ein Vielfaches einer Zeile von A zur anderen Zeile von A addieren, so gilt

$$\det A' = \det A\,.$$

Das Gleiche gilt, wenn A' aus A dadurch entsteht, dass wir ein Vielfaches einer Spalte von A zur anderen Spalte von A addieren.

Beispiel

Ist $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und ist $A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, so entsteht A' aus A durch Addition des Doppelten der ersten Zeile zur zweiten, und es gilt

$$\det A' = (-1) \cdot 1 = 1 = (-1) \cdot 3 - 1 \cdot 2 = \det A\,.$$

Durch diese Zeilenumformung haben wir A auf eine obere Dreiecksform gebracht und somit die Berechnung der Determinante vereinfacht. ◄

Diese Regeln erlauben es immer, die Berechnung von Determinanten auf die Berechnung der Determinante einer oberen Dreiecksmatrix zu reduzieren. In diesem Fall ist die Determinante einfach zu berechnen, wie wir schon gesehen haben.

Eine wichtige Operation bei quadratischen Matrizen ist die Multiplikation. Auch für das Produkt von zwei Matrizen lässt sich die Determinante leicht berechnen:

Produktsatz

Sind A, B zwei 2×2-Matrizen, so gilt

$$\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B\,.$$

Beispiel

Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Teil III

gilt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 15 & 6 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

und

$$\det(A \cdot B) = 15 \cdot 4 - 6 \cdot 8 = 12 = 2 \cdot 6 = \det A \cdot \det B\,.$$ ◀

Der allgemeine Nachweis der Produktformel ist eine etwas mühsame Rechnung, für die auf Aufgabe 13.2 verwiesen wird. Für $n \times n$-Matrizen wird diese Aussage auch noch in Abschn. 13.2 aufgegriffen.

Die Determinante kann auch geometrisch interpretiert werden: Sind

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

zwei nichtkollineare Vektoren, so bezeichnen wir mit P das Parallelogramm, dessen Seiten durch die beiden Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ gegeben sind (Abb. 13.1).

Determinanten und Parallelogramme

Ist

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix},$$

so ist $|\det A|$ der Flächeninhalt des Parallelogramms P.

Dazu schreiben wir die Vektoren in ihrer Polarkoordinatendarstellung

$$\boldsymbol{a} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = s \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi) \\ \sin(\psi) \end{pmatrix}.$$

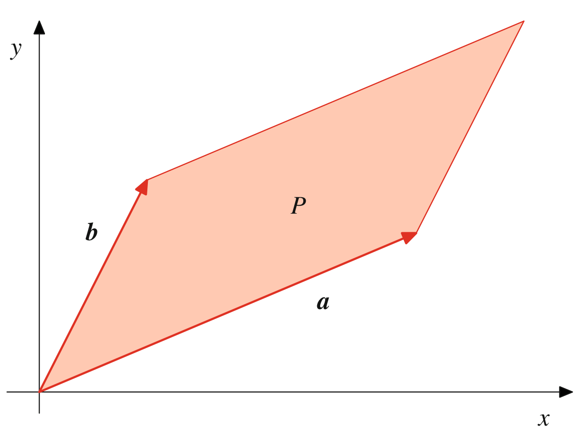

Abb. 13.1 Determinante und Parallelogramm

und erhalten damit nach den Additionstheoremen für Sinus und Kosinus

$$\begin{aligned} \det A &= r \cdot \cos(\varphi) \cdot s \cdot \sin(\psi) - s \cdot \cos(\psi) \cdot r \cdot \sin(\varphi) \\ &= r \cdot s \cdot \sin(\psi - \varphi) \end{aligned}$$

Dabei ist entweder $\psi - \varphi$ oder $-(\psi - \varphi)$ der Winkel zwischen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$. Damit ist $s \cdot |\sin(\psi - \varphi)|$ die Höhe des Parallelogramms P, dessen Grundlinie durch den Vektor $\boldsymbol{a}$ und dessen Seitenlinie durch den Vektor $\boldsymbol{b}$ gegeben ist, und dementsprechend ist $r \cdot s \cdot |\sin(\psi - \varphi)| = |\det A|$ seine Fläche.

Da also $|\det A| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin(\alpha)$, wobei $\alpha \in [0, \pi]$ den Winkel zwischen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ bezeichnet, erhalten wir auch folgende interessante Formel:

$$\begin{aligned} (\det A)^2 + \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^2 &= |\boldsymbol{a}|^2 \cdot |\boldsymbol{b}|^2 \cdot \sin^2(\alpha) + |\boldsymbol{a}|^2 \cdot |\boldsymbol{b}|^2 \cdot \cos^2(\alpha) \\ &= |\boldsymbol{a}|^2 \cdot |\boldsymbol{b}|^2 \left(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)\right) \\ &= |\boldsymbol{a}|^2 \cdot |\boldsymbol{b}|^2, \end{aligned}$$

also

$$(\det A)^2 = |\boldsymbol{a}|^2 \cdot |\boldsymbol{b}|^2 - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^2\,. \tag{13.7}$$

Betrachten wir nun ein beliebiges Dreieck Δ mit den Eckpunkten A, B und C, so ist dieses Dreieck die Hälfte des Parallelogramms, dessen Seiten durch die Verbindungsvektoren $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{CA}$ und $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{CB}$ gegeben werden (Abb. 13.2).

Damit erhalten wir die folgende Formel aus dem Satz über Parallelogrammflächen.

Determinanten und Dreiecksflächen

Ist Δ das Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C, sind $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{CA}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{CB}$ und ist $A = (\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b})$ die Matrix mit Spalten $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$, so ist $\frac{|\det A|}{2}$ der Flächeninhalt des Dreiecks Δ.

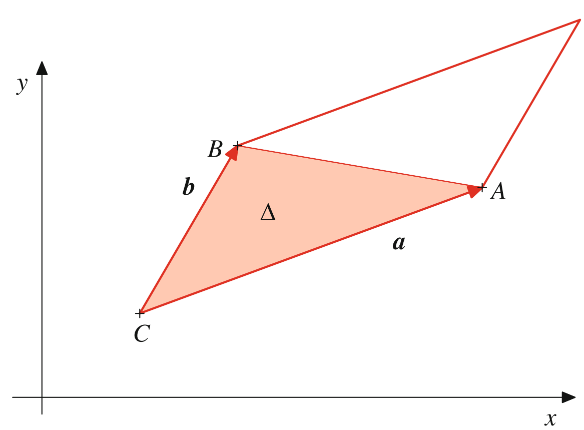

Abb. 13.2 Determinante und Dreieck

Determinanten von 3×3-Matrizen werden durch Volumenformeln bestimmt

Nach den 2×2-Matrizen wollen wir uns nun den 3×3-Matrizen bzw. den Gleichungssystemen mit drei Unbekannten und drei Gleichungen zuwenden. Wir betrachten also

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 &= b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 &= b_3\,, \end{aligned} \tag{13.8}$$

dessen Koeffizientenmatrix wir wie üblich mit A bezeichnen.

Unser Ziel ist es wieder, dem Gleichungssystem (13.8) bzw. seiner Koeffizientenmatrix A eine Zahl $\det A$ zuzuordnen, die genau dann von 0 verschieden ist, wenn das Gleichungssystem für jede Wahl von b_1, b_2 und b_3 eine eindeutige Lösung hat. Darüber hinaus sollen auch die Regeln, die wir für zweidimensionale Determinanten abgeleitet haben, in analoger Weise im dreidimensionalen Fall gelten.

Für die Berechnung der Determinante einer 2×2-Matrix haben die Diagonale und die Gegendiagonale eine besondere Rolle gespielt. Betrachten wir im dreidimensionalen die speziellen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 \phantom{+ a_{2,2}x_2 + a_{3,3}x_3} &= b_1 \\ a_{2,2}x_2 \phantom{+ a_{3,3}x_3} &= b_2 \\ a_{3,3}x_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{13.9}$$

mit $a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} \neq 0$ und

$$\begin{aligned} a_{1,3}x_3 &= b_1 \\ a_{2,2}x_2 \phantom{+ a_{1,3}x_3} &= b_2 \\ a_{3,1}x_1 \phantom{+ a_{2,2}x_2 + a_{1,3}x_3} &= b_3 \end{aligned} \tag{13.10}$$

mit $a_{1,3} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,1} \neq 0$, so haben auch diese stets eine eindeutige Lösung. Damit ist zu erwarten, dass auch bei der Bildung der dreidimensionalen Determinante die Produkte der Diagonalelemente, $a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3}$ und der Nebendiagonalelemente $a_{1,3} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,1}$ eine besondere Rolle spielen. Eine Bildung der Form

$$''\det''(A) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} - a_{1,3} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,1}\,,$$

die der zweidimensionalen Determinante recht nahekommt, greift aber leider zu kurz. Sie liefert zwar für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ein Ergebnis wie gewünscht, nämlich den Wert 1, aber für die Matrizen

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir mit dieser Methode immer den Wert 0, obwohl auch hier die zugehörigen Gleichungssysteme eindeutig lösbar sind und obwohl diese Matrizen aus A durch (wiederholte) Vertauschung von Zeilen oder Spalten hervorgegangen sind und wir daher aufgrund der entsprechenden Formel für 2×2-Matrizen im Dreidimensionalen den Wert 1 oder -1 erwarten. Diese Beispiele zeigen bereits, dass die Definition der dreidimensionalen Determinante nicht nur die Diagonale und die Gegendiagonale berücksichtigen muss, sondern auch noch weitere Größen der Matrix. Nicht unmittelbar klar ist aber, welche das sind. Darum wollen wir uns zunächst einem anderen Zugang zuwenden. Sind $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ zwei nichtkollineare ebene Vektoren und ist A die 2×2-Matrix, die diese Vektoren als Spalten hat, so haben wir gesehen, dass $|\det A|$ der Flächeninhalt des von $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ aufgespannten Parallelogramms ist. Die räumliche Entsprechung eines Parallelogramms ist das Parallelepiped, und daher ist es naheliegend, im Dreidimensionalen das Folgende zu verlangen: Sind $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ drei nicht komplanare räumliche Vektoren und ist A die 3×3-Matrix, die diese Vektoren als Spalten hat, so ist $|\det A|$ der Inhalt des von $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ aufgespannten Parallelepipeds. In Abschn. 10.2 haben wir bereits eine Größe kennengelernt, die diese Bedingung erfüllt: das Spatprodukt $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$ der Vektoren $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ bzw. dessen Betrag. Wollen wir also diese geometrische Interpretation auch im Dreidimensionalen, so ergibt sich daraus: Sind die drei Spaltenvektoren $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ der Matrix A nicht komplanar, so muss

$$\det A = \pm[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$$

gelten. Wenn wir zudem auch im Dreidimensionalen die Normierungseigenschaft, also die Bedingung, dass die Determinante der Einheitsmatrix den Wert 1 haben soll, $\det \mathrm{E}_3 = 1$, bekommen wollen, so bedeutet das

$$\det A = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]\,.$$

Das ist tatsächlich der richtige Ansatz und Formel 10.4 liefert:

Definition

Die **Determinante** $\det A$ einer 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

ist der Ausdruck

$$\begin{aligned} \det A = {} & a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} \\ & - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}\,. \end{aligned}$$

Ist die Matrix A explizit gegeben, so schreiben wir in diesem Fall auch

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \det A\,.$$

Teil III

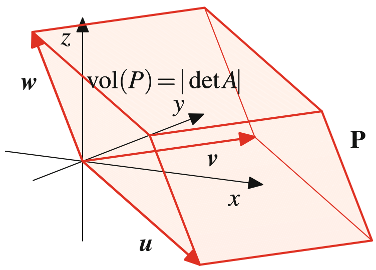

Abb. 13.3 Determinante und das Volumen eines Parallelepipeds

Sind $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ drei nicht komplanare Vektoren im $\mathbb{R}^3$, ist P das durch $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ definierte Parallelepiped (Abb. 13.3), und ist A die Matrix mit $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ als Spalten, so erhalten wir aus der Definition die folgende Formel.

Determinanten und Parallelepipede

$$\mathrm{vol}(P) = |\det A|\,.$$

Wie schon in den Vorüberlegungen festgestellt, spielen Diagonale und Gegendiagonale bei der Bildung der Determinante eine Rolle. Allerdings treten auch noch andere Produkte auf.

Beispiel

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot 4\cdot 1 + 0\cdot 2\cdot 0 \\ \quad - 0\cdot 3\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 3 - 1\cdot 4\cdot 0 \\ = 5\,.$$ ◀

Beispiel

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot 4\cdot 0 + 3\cdot 0\cdot 0 \\ \quad - 3\cdot 3\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot 3 - 1\cdot 4\cdot 0 \\ = 9\,.$$ ◀

Beispiel

Für die 3×3-Einheitsmatrix E_3 gilt

$$\det \mathrm{E}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,.$$ ◀

Zu einer 3×3-Matrix $A = (a_{i,j})$ betrachte man das Schema in Abb. 13.4.

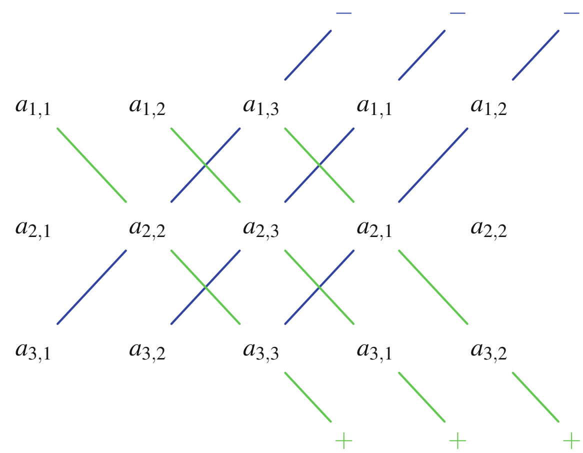

Abb. 13.4 Das Schema von Sarrus

Dieses erhalten wir, wenn wir die Spalten von A hinschreiben und die ersten beiden Spalten von A noch einmal anfügen.

Regel von Sarrus

Die Determinante von A berechnet sich dadurch, dass wir im Schema in Abb. 13.4 jeweils die Elemente entlang der drei (grünen) Diagonalen miteinander multiplizieren und aufaddieren und jeweils die Elemente entlang der drei (blauen) Gegendiagonalen miteinander multiplizieren und davon abziehen.

Beispiel

Zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

gehört das in Abb. 13.5 dargestellte Sarrus-Schema.

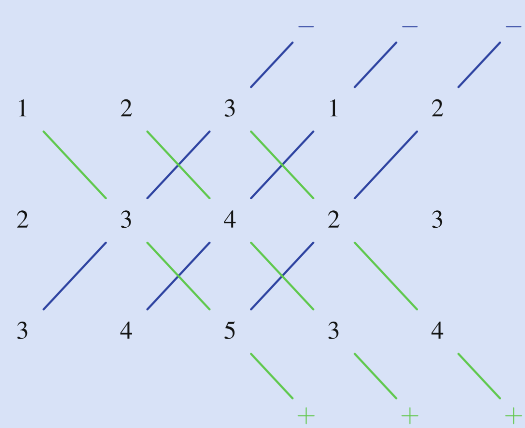

Abb. 13.5 Sarrus-Schema

und damit die Determinante

$$1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot 5 = 0\,. \blacktriangleleft$$

Achtung Die Berechnung der Determinante mit dem Sarrus-Schema ist eine sehr spezielle Regel, die nur für 3×3-Matrizen gilt und nicht auf andere Matrizen verallgemeinert werden kann. ◀

Wie im Zweidimensionalen gibt es auch hier eine Determinantenformel, um die Lösung eines Gleichungssystems

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{13.11}$$

für eine 3×3-Koeffizientenmatrix A mit $\det A \neq 0$ zu berechnen.

Die cramersche Regel

Ist $\det A \neq 0$ und bezeichnen wir mit $A_k(\boldsymbol{b})$ die 3×3-Matrix, die aus A dadurch entsteht, dass wir die k-te Spalte von A durch $\boldsymbol{b}$ ersetzen, so hat Gleichungssystem (13.11) eine eindeutige Lösung, gegeben durch

$$x_k = \frac{\det(A_k(\boldsymbol{b}))}{\det A} \qquad \text{für } k = 1, 2, 3\,.$$

Die Determinante kann nach einer Zeile oder Spalte entwickelt werden

Die Berechnung der Determinante im Dreidimensionalen ist also wesentlich komplizierter als im Zweidimensionalen. Daher ist es in diesem Fall besonders wichtig, Formeln und Regeln zu finden, die die Berechnungen vereinfachen. Eine Beziehung, die folgende **Entwicklungsformel**, ergibt sich unmittelbar aus der Definition des Spatprodukts, die ja der Determinante zugrunde liegt.

Ist $A = (a_{i,j})$ eine 3×3-Matrix, so gilt

$$\begin{aligned}
\det A &= a_{1,1} \cdot (a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) \\
&\quad - a_{2,1} \cdot (a_{1,2}a_{3,3} - a_{3,2}a_{1,3}) \\
&\quad + a_{3,1} \cdot (a_{1,2}a_{2,3} - a_{2,2}a_{1,3}) \\
&= a_{1,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \\
&\quad - a_{2,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \\
&\quad + a_{3,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Die Determinantenberechnung lässt sich also auf die Berechnung von Determinanten von 2×2-Matrizen zurückführen. Diese Regel gilt sogar noch etwas allgemeiner. Dazu betrachten wir eine beliebige 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Für $i, j \in \{1, 2, 3\}$ bezeichnen wir mit $A_{i,j}$ die i,j-**Streichungsmatrix**, also die 2×2-Matrix, die wir aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte erhalten.

Beispiel

Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

gilt etwa

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad A_{2,1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix},$$

$$A_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \qquad A_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},$$

$$A_{3,1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad A_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}. \qquad \blacktriangleleft$$

Diese Teilmatrizen können nun wie folgt in der Berechnung der Determinanten verwendet werden:

Entwicklungssatz von Laplace

Für eine allgemeine 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

kann $\det A$ nach folgenden Regeln berechnet werden:

1. **Entwicklung nach der i-ten Zeile:** Für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$ gilt

$$\begin{aligned}
\det A = (-1)^{i+1} \cdot a_{i,1} \cdot \det(A_{i,1}) \\
+ (-1)^{i+2} \cdot a_{i,2} \cdot \det(A_{i,2}) \\
+ (-1)^{i+3} \cdot a_{i,3} \cdot \det(A_{i,3})\,.
\end{aligned}$$

2. **Entwicklung nach der j-ten Spalte:** Für jedes $j \in \{1, 2, 3\}$ gilt

$$\begin{aligned}
\det A = (-1)^{1+j} \cdot a_{1,j} \cdot \det(A_{1,j}) \\
+ (-1)^{2+j} \cdot a_{2,j} \cdot \det(A_{2,j}) \\
+ (-1)^{3+j} \cdot a_{3,j} \cdot \det(A_{3,j})\,.
\end{aligned}$$

Die Entwicklung nach der ersten Spalte haben wir explizit nachgerechnet. Alle anderen Fälle werden ähnlich überprüft.

Achtung Die Determinanten der Streichungsmatrizen werden nicht einfach nur addiert, vielmehr sind dabei Vorzeichen und Vorfaktoren zu berücksichtigen. ◀

Beispiel

Wir betrachten wieder die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Hierfür gilt

$$A_{2,1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \ A_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \ A_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},$$

wie wir schon gesehen haben. Entwickeln wir die Determinante also nach der zweiten Zeile, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \det A = 4 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \\ + 5 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \\ + 6 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ = -4 \cdot (-6) + 5 \cdot (-12) - 6 \cdot (-6) \\ = 0 . \end{aligned}$$

◀

Trotz der Entwicklungsregel bleibt das Berechnen von Determinanten mühsam und vor allem fehleranfällig. Daher werden weitere Regeln benötigt, die Vereinfachungen erlauben. Diese entsprechen denen für 2×2-Matrizen.

Rechenregeln für Determinanten

Für eine 3×3-Matrix A erhalten wir:

1. $\det A^\top = \det A$.
2. Es gilt schon $\det A = 0$, wenn
   - eine Zeile von A die Nullzeile ist,
   - eine Spalte von A die Nullspalte ist,
   - eine Zeile von A Vielfaches einer anderen Zeile ist,
   - eine Spalte von A Vielfaches einer anderen Spalte ist.
3. Ist A eine obere oder untere Dreiecksmatrix (d. h. ist $a_{2,1} = a_{3,1} = a_{3,2} = 0$ oder $a_{1,2} = a_{1,3} = a_{2,3} = 0$), so gilt
$$\det A = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} .$$
4. Entsteht A' aus A durch Vertauschung von zwei Zeilen, so gilt
$$\det A' = -\det A .$$
Das Gleiche gilt, wenn A' aus A durch Vertauschung von zwei Spalten entsteht.
5. Entsteht A' aus A durch Multiplikation einer Zeile von A mit einer Zahl r, so gilt
$$\det A' = r \cdot \det A .$$
Das Gleiche gilt, wenn A' aus A durch Multiplikation einer Spalte von A mit einer Zahl r hervorgeht.
6. Ist $A' = r \cdot A$, so gilt
$$\det A' = r^3 \cdot \det A .$$
7. Entsteht A' aus A dadurch, dass wir ein Vielfaches einer Zeile von A zu einer anderen Zeile von A addieren, so gilt
$$\det A' = \det A .$$
Das Gleiche gilt, wenn A' aus A dadurch entsteht, dass wir ein Vielfaches einer Spalte von A zu einer anderen Spalte von A addieren.
8. Ist B eine weitere 3×3-Matrix, so gilt
$$\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B .$$

Die Überprüfung dieser Eigenschaften ist ähnlich, wenn auch rechenaufwendiger als im zweidimensionalen Fall.

Diese Regeln erlauben es immer, die Berechnung der Determinante einer Matrix auf die Berechnung der Determinante einer Dreiecksmatrix zurückzuführen.

Beispiel

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Wir subtrahieren das Doppelte der ersten Zeile von der zweiten Zeile und die erste Zeile von der dritten Zeile und erhalten
$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Dadurch ändert sich die Determinante der Matrix nicht, $\det A' = \det A$.

2. Wir vertauschen die Zeilen 2 und 3 der Matrix und bekommen
$$A'' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Dadurch ändert sich das Vorzeichen der Determinante, $\det A'' = -\det A' = -\det A$.
3. Da A'' eine Dreiecksmatrix ist, gilt
$$\det A'' = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2\,.$$
4. Die Operation in Schritt 2. hat zu einem Vorzeichenwechsel der Determinante geführt. Wir machen diesen rückgängig und erhalten
$$\det A = -\det A'' = -2\,.$$ ◀

Unser ursprüngliches Ziel war es, eine Größe zu finden, die uns erlaubt zu entscheiden, ob ein lineares Gleichungssystem

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

für jede Wahl von $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ eine eindeutige Lösung hat oder nicht. Wir wollen nun überprüfen, ob wir dieses Ziel mit dieser Definition der Determinante erreicht haben, betrachten dazu die augmentierte Matrix $(A \mid \boldsymbol{b})$ und führen diese in eine Normalform $(A' \mid \boldsymbol{b}')$ über. Hierzu benötigen wir bekanntlich die folgenen Zeilen- und Spaltenumformungen:

1. Subtraktion des Vielfachen einer Zeile von $(A \mid \boldsymbol{b})$ von einer anderen Zeile.
2. Vertauschung von zwei Zeilen von $(A \mid \boldsymbol{b})$.
3. Multiplikation einer Zeile von $(A \mid \boldsymbol{b})$ mit einer Zahl $r \neq 0$.
4. Vertauschung von zwei Spalten von $(A \mid \boldsymbol{b})$, von denen aber keine der Vektor $\boldsymbol{b}$ sein darf.

Bei all diesen Operationen wissen wir jetzt, wie sich die Determinante ändert, und wir erhalten aus der Regel zum Rechnen mit Determinanten:

Genau dann ist $\det A \neq 0$, wenn $\det A' \neq 0$.

Wir können uns daher bei unseren Überlegungen auf Gleichungssysteme $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ in Normalform beschränken. In diesem Fall ist aber A eine Dreieckmatrix und hat eine der folgenden Gestalten:

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$N_3 = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_4 = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In den ersten drei Fällen gilt $\det N_l = 0$ $(l = 1, 2, 3)$, nur im vierten Fall haben wir

$$\det N_4 = 1 \neq 0\,.$$

Dieser Fall ist genau die Situation, in der $\mathrm{Rang}(A) = 3$ und in der das Gleichungssystem

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

immer eine eindeutige Lösung hat. Damit bestimmt die Determinante tatsächlich die eindeutige Lösbarkeit.

Deteminanten und eindeutige Lösbarkeit

Ist A eine 3×3-Matrix, so hat das Gleichungssystem

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

genau dann für jeden Vektor $\boldsymbol{b}$ eine eindeutige Lösung, wenn
$$\det A \neq 0\,.$$

Teil III

13.2 Die Determinante einer $n \times n$-Matrix

Analog zum Begriff der Vektoren, den wir zunächst im zwei- und dreidimensionalen Fall studiert haben, ehe wir ihn allgemein betrachtet haben, wollen wir jetzt auch die Determinantentheorie in der allgemeinen Situation untersuchen. Der Übergang vom Zwei- zum Dreidimensionalen legt aber schon nahe, dass hier die Situation etwas komplizierter sein wird. Auch der mit dem Sarrus-Schema gefundene Ansatz lässt sich nicht ins Höherdimensionale verallgemeinern.

Die Determinante wird durch eine Entwicklungsformel definiert

Es gibt viele Methoden, Determinanten zu motivieren und einzuführen. Wir wollen hier einen rekursiven Zugang verfolgen, mit dem wir auch schon die Berechnung dreidimensionaler Determinanten auf die Berechnung zweidimensionaler Determinanten zurückgeführt haben.

Wir betrachten dazu eine beliebige $n \times n$-Matrix $A = (a_{i,j})$. Für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ bezeichnen wir wieder mit $A_{i,j}$ die i,j-Streichungsmatrix von A, also die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die aus A durch Streichung der i-ten Zeile und der j-ten Spalte hervorgeht. Wir definieren rekursiv.

Anwendung: Elektrische Netzwerke

In der elektrischen Messtechnik spielen Brückenschaltungen eine wichtige Rolle. Brückenschaltungen bestehen aus zwei parallelen Zweigen mit mindestens zwei passiven Zweipolen (also etwa Widerständen) und einem Querzweig. Ein einfaches Beispiel ist in Abb. 13.6 dargestellt.

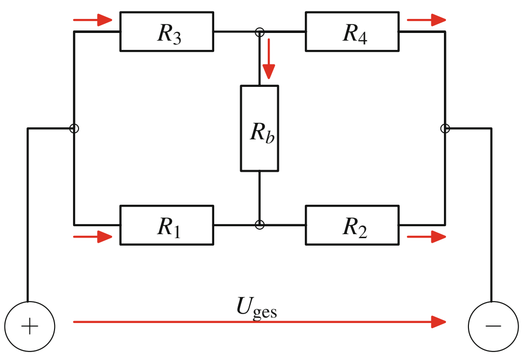

Abb. 13.6 Eine elektrische Brückenschaltung

In ihrer Grundform besteht eine Brückenschaltung also aus fünf Zweipolen, die in Form des Buchstaben **H** angeordnet sind, weshalb man auch von H-Schaltungen oder H-Brücken spricht. Der Querzweig heißt auch Brückenzweig.

Diese Brückenschaltung heißt abgeglichen, wenn die Spannung über ihrem Querzweig 0 ist. Nach dem ohmschen Gesetz ist das äquivalent dazu, dass der Widerstand R_b stromlos ist. Wie müssen die Widerstände R_1, R_2, R_3 und R_4 gewählt werden, damit die Brückenschaltung abgeglichen ist?

Wir bezeichnen dazu mit I_k bzw. I_b die Stärke des durch R_k ($k = 1, \ldots, 4$) bzw. R_b fließenden Stromes. Dann wird die Brückenschaltung nach den kirchhoffschen Gesetzen (also der Maschen- und der Knotenregel) beschrieben durch das folgende Gleichungssystem (s. Anwendung „Elektrische Netzwerke" in Abschn. 12.1)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
I_1 & & & + & I_3 & & & & & = & I \\
& & & & I_3 & - & I_4 & - & I_b & = & 0 \\
I_1 & - & I_2 & & & & & + & I_b & = & 0 \\
R_1 I_1 & & & - & R_3 I_3 & & & + & R_b I_b & = & 0 \\
& & R_2 I_2 & & & - & R_4 I_4 & - & R_b I_b & = & 0\,,
\end{array}$$

Die Bedingung $I_b = 0$ reduziert die zweite und die dritte Gleichung zu

$$\begin{aligned}
I_3 - I_4 &= 0 \\
I_1 - I_2 \qquad &= 0\,,
\end{aligned}$$

woraus $I_1 = I_2$ und $I_3 = I_4$ folgt. Eingesetzt in die vierte und fünfte Gleichung ergibt das (zusammen mit $I_b = 0$):

$$\begin{aligned}
R_1 I_1 - R_3 I_3 &= 0 \\
R_2 I_1 - R_4 I_3 &= 0
\end{aligned}$$

Das homogene Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} R_1 & -R_3 \\ R_2 & -R_4 \end{pmatrix}$$

muss also (neben der trivialen) auch eine nichttriviale Lösung haben. Da ein homogenes Gleichungssystem, dessen Determinante nicht verschwindet, aber nur die triviale Lösung hat, bedeutet das, dass $\det A = 0$ sein muss, also

$$-R_1 \cdot R_4 + R_3 \cdot R_2 = 0\,.$$

Damit die Brückenschaltung abgeglichen ist, muss also die **Abgleichbedingung**

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

erfüllt sein. Sind daher drei der Widerstände R_1, R_2, R_3 und R_4 bekannt, so lässt sich immer ein passender vierter Widerstand finden, sodass die Abgleichbedingung erfüllt ist. In diesem Fall liefert das Gleichungssystem, wenn wir etwa R_1 durch $\frac{R_2 \cdot R_3}{R_4}$ ersetzen, nach einigen einfachen Umformungen die Bedingung

$$(R_b \cdot (R_3 + R_4) - R_3 \cdot (R_2 + R_4)) \cdot I_b = 0\,,$$

sodass notwendigerweise $I_b = 0$, falls die Abgleichbedingung erfüllt ist, außer im Fall

$$R_b = R_3 \cdot \frac{R_2 + R_4}{R_3 + R_4}\,,$$

in welchem die Ströme durch das Gleichungssystem nicht eindeutig bestimmt sind. In diesem speziellen Fall folgt aus der Abgleichbedingung alleine noch nicht, dass die Brückenschaltung abgeglichen ist.

Aufgrund der Abgleichbedingung können Brücken zur Bestimmung unbekannter Widerstände benutzt werden. Ist etwa R_1 zu messen, so kann bei festem R_3 und R_4 der Widerstand R_2 solange variiert werden, bis die Brücke abgeglichen ist. Dann kann aus der Abgleichbedingung R_1 berechnet werden.

Definition

Die **Determinante** $\det A$ von A ist definiert wie folgt:

- Ist $n = 1$, also $A = (a_{1,1})$, so ist $\det A = a_{1,1}$.
- Ist $n = 2$ oder $n = 3$, so ist $\det A$ definiert wie in Abschn. 13.1.
- Ist $n > 3$ und die Determinante für $(n-1) \times (n-1)$-Matrizen schon erklärt, so setzen wir

$$\begin{aligned}\det A &= a_{1,1} \cdot \det(A_{1,1}) - a_{1,2} \cdot \det(A_{1,2}) \\ &\quad + \cdots \pm a_{1,n} \cdot \det(A_{1,n}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1,j} \cdot \det\left(A_{1,j}\right) .\end{aligned}$$

Beispiel

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die benötigten Teilmatrizen sind

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_{1,4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\det(A_{1,1}) = 0, \quad \det(A_{1,2}) = 0,$$
$$\det(A_{1,3}) = 0, \quad \det(A_{1,4}) = -2.$$

Also gilt

$$\det A = (-1)^{1+4} \cdot (-1) \cdot (-2) = -2 .$$

◄

Wir wollen nun einige Formeln und Regeln angeben, die das Berechnen von Determinanten vereinfachen.

Determinanten und Spaltenvertauschungen

Geht B aus A durch das Vertauschen von zwei Spalten hervor, so gilt

$$\det B = -\det A .$$

Beispiel

Wir betrachten als Beispiel die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

Hierfür ist

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{1,4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

mit

$$\det(A_{1,1}) = 11 , \quad \det(A_{1,2}) = -2 ,$$
$$\det(A_{1,3}) = -9 , \quad \det(A_{1,4}) = -3 .$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot 11 + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot (-2) \\ &\quad + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot (-9) + (-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot (-3) \\ &= 7 .\end{aligned}$$

Vertauschen wir nun Spalte 1 und Spalte 2, so erhalten wir die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

mit den Streichungsmatrizen

$$B_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_{1,3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{1,4} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

wobei

$$\det(B_{1,1}) = -2 , \quad \det(B_{1,2}) = 11 ,$$
$$\det(B_{1,3}) = 9 , \quad \det(B_{1,4}) = 3 .$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\det B &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot (-2) + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot 11 \\ &\quad + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot 9 + (-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot 3 \\ &= -7 \\ &= -\det A .\end{aligned}$$

◄

Teil III

13.1 Mathematischer Hintergrund: Die symmetrische Gruppe S_n und Determinanten

Aus der rekursiven Definition folgt sofort, dass man die Definition der Determinante vollständig auflösen und eine Formel angeben kann, in der nur noch die Elemente der Matrix auftauchen. Bei einer 4×4-Matrix etwa tauchen in der Definition die Determinanten von vier 3×3-Matrizen auf, die sich explizit mithilfe ihrer Elemente hinschreiben lassen, so dass sich auch die Determinante der 4×4-Matrix so ausdrücken lässt. Die Determinante einer 5×5-Matrix wiederum schreibt sich als Summe von Determinanten von 4×4-Matrizen mit Vorfaktoren. Da sich die 4×4-Matrizen explizit mit ihren Elementen beschreiben lassen, gilt das auch für die 5×5-Determinanten. Klar ist dabei aber, dass die Beschreibung der Determinanten auf diese Art und Weise komplex und kombinatorisch aufwendig sein wird. Bei der 5×5-Determinante treten bereits 120 Summanden auf, und jeder dieser Summand ist das Produkt von fünf Matrixelementen, manche davon zusätzlich noch mit einem Faktor -1 davor. Die Struktur dieser Summe und der Summanden lässt sich jedoch recht gut mit einer Gruppe beschreiben.

Wir betrachten die Menge $M_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ und bezeichnen mit S_n die Menge der bijektiven Abbildungen auf M_n.

S_n heißt **Permutationsgruppe** der Zahlen $1, \ldots, n$, und ihre Elemente heißen Permutationen von $1, \ldots, n$. Ein $\sigma \in S_n$ ist eine Abbildung, die die Zahlen $1, \ldots, n$ wieder auf $1, \ldots, n$ abbildet, allerdings in einer anderen Anordnung und Reihenfolge, die also die Zahlen $1, \ldots, n$ permutiert.

Ein Element $\sigma \in S_n$ lässt sich gut tabellarisch darstellen:

1	2	$\ldots$	$n-1$	n
$\sigma(1)$	$\sigma(2)$	$\ldots$	$\sigma(n-1)$	$\sigma(n)$

Hierfür benutzen wir die Schreibweise

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

In der zweiten Zeile dieser Darstellung tauchen wieder alle Zahlen $1, \ldots, n$ auf, allerdings in geänderter, also permutierter Reihenfolge.

So ist etwa

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

die Permutation der Zahlen $1, 2, 3, 4$, die die Zahlen 1 und 4 vertauscht (und alle anderen festlässt), also eine Vertauschung von zwei Zahlen, für die wir auch kurz $\tau_{1,4}$ schreiben.

Die Abbildung

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

ist die Permutation, die jede Zahl um eine Position weiterschiebt (und die 4 auf die 1 abbildet). Die Permutation σ entspricht vier Personen, die in einem Kreis sitzen, in dem die erste und die letzte Person ihre Plätze tauschen, während bei τ alle vier Personen einen Stuhl weiterrücken (Abb. 13.7).

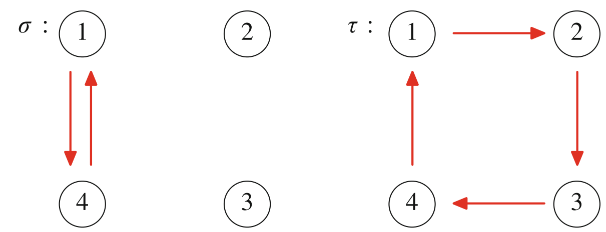

Abb. 13.7 Zwei Permutationen

Ganz allgemein schreiben wir für eine Permutation $\sigma \in S_n$, die nur die Zahlen i und j ($i \neq j$) vertauscht, kurz $\tau_{i,j}$ (geläufig ist auch die Notation $\langle i j \rangle$, die wir aber nicht benutzen werden, um Verwechslungen mit Skalarprodukten zu vermeiden), und nennen sie die **Transposition** der Zahlen i und j. Wegen $\tau_{i,j} = \tau_{j,i}$ können wir dabei stets davon ausgehen, dass $i < j$.

Jede Permuation lässt sich (in nichteindeutiger Weise) aus Transpositionen zusammensetzen, d. h., ist $\sigma \in S_n$, so gibt es Zahlenpaare $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_t, j_t)$ mit $1 \leq i_\tau < j_\tau \leq n$, sodass

$$\sigma = \tau_{i_1, j_1} \circ \tau_{i_2, j_2} \circ \cdots \circ \tau_{i_t, j_t}.$$

Mit $\mathrm{id} = \mathrm{id}_n$ bezeichnen wir das Element von S_n, das die Reihenfolge der Zahlen nicht verändert, also

$$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Ferner definieren wir eine Verknüpfung $\circ$ auf S_n durch die Komposition von Abbildungen, also

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \ldots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $(S_n, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element id und heißt die **Permutationsgruppe** von $\{1, \ldots, n\}$.

Beachten Sie, dass diese Gruppe nicht kommutativ ist, dass im Allgemeinen also $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$. Dazu betrachten wir die Elemente

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt hierfür

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

aber

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Permutation entspricht einer Anordnung der Zahlen $1, \dots, n$, also einem geordneten n-Tupel $(a_1, \dots, a_n)$ mit $a_i \in \{1, \dots, n\}$ und $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$. Da es insgesamt $n!$ viele Möglichkeiten gibt, n Zahlen anzuordnen, gilt also

$$|S_n| = n!.$$

Ist $\tau = \tau_{i,j}$ die Transposition der Zahlen i, j, so gilt hierfür

$$\tau \circ \tau = \mathrm{id},$$

und damit gilt allgemein für eine beliebige Permutation σ mit Darstellung

$$\sigma = \tau_{i_1,j_1} \circ \tau_{i_2,j_2} \circ \dots \circ \tau_{i_t,j_t},$$

dass

$$\sigma \circ \tau_{i_t,j_t} \circ \tau_{i_{t-1},j_{t-1}} \circ \dots \circ \tau_{i_1,j_1} = \mathrm{id},$$

sodass wir auch für σ^{-1} eine Darstellung mit Transpositionen gefunden haben,

$$\sigma^{-1} = \tau_{i_t,j_t} \circ \tau_{i_{t-1},j_{t-1}} \circ \dots \circ \tau_{i_1,j_1}.$$

Eine wichtige Größe bei der Betrachtung von Permutationen ist die Anzahl der Fehlstände. Ein Paar $i, j \in \{1, \dots, n\}$ heißt Fehlstand von σ, wenn $i < j$, aber $\sigma(i) > \sigma(j)$. Wir definieren die **Signatur** $\mathrm{sign}(\sigma)$ von σ durch

$$\mathrm{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1, & \text{falls die Anzahl der Fehlstände gerade ist}, \\ -1, & \text{falls die Anzahl der Fehlstände ungerade ist}. \end{cases}$$

Wir nennen eine Permuation σ **gerade**, wenn $\mathrm{sign}(\sigma) = +1$ und **ungerade**, wenn $\mathrm{sign}(\sigma) = -1$.

Die Signatur wird durch die Formel

$$\mathrm{sign}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

beschrieben, wie leicht nachgerechnet werden kann. Dabei steht $\prod$ für das Produktzeichen, also

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n.$$

Wir notieren die folgenden Eigenschaften der Signatur:

1. Ist $\tau = \tau_{i,j}$ eine Transposition, so gilt $\mathrm{sign}(\tau) = -1$.
2. Sind σ, τ zwei Permutationen, so gilt
$$\mathrm{sign}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \mathrm{sign}(\tau).$$
3. $\mathrm{sign}(\mathrm{id}) = 1$ und $\mathrm{sign}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sign}(\sigma)$.
4. Ist $\sigma = \tau_{i_1,j_1} \circ \tau_{i_2,j_2} \circ \dots \circ \tau_{i_t,j_t}$, so ist $\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^t$.
5. Für $n \geq 2$ gibt es genauso viele gerade Permutationen wie ungerade Permutationen.

Diese Permutationsgruppe erlaubt nun eine kompakte und direkte Beschreibung der Determinante mit den Elementen der Matrix. Setzen wir nämlich in die Rekursionsformel

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1,j} \cdot \det\left(A_{1,j}\right)$$

für die Determinanten der Streichungsmatrizen immer wieder die Definition der Determinante ein (etwa

$$\begin{aligned} \det\left(A_{1,1}\right) = a_{2,2} \cdot \det\left(\left(A_{1,1}\right)_{1,1}\right) \\ - a_{2,3} \cdot \det\left(\left(A_{1,1}\right)_{1,2}\right) \\ + \dots \pm a_{2,n} \cdot \det\left(\left(A_{1,1}\right)_{1,n-1}\right) \end{aligned}$$

usw.), bis wir zu einer Darstellung mit den Elementen der Matrix kommen, so erhalten wir

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

mit einer Summe über alle Permutationen $\sigma \in S_n$, also einer Summe mit $n!$ vielen Summanden.

Da $n!$ sehr schnell wächst, wenn n groß wird, kann man schon erkennen, dass der Rechenaufwand zur Ermittlung der Determinante (zumindest mit dieser Methode) sehr groß werden kann. Diese Beschreibung der Determinante ist daher hauptsächlich von Nutzen für die Theorie, denn viele Eigenschaften von Determinanten lassen sich auf diesem Weg schnell gewinnen. Für die numerische Bestimmung werden wir jedoch andere Methoden entwickeln.

In diesem Beispiel unterscheiden sich die Determinanten der Streichungsmatrizen der Matrix B nur in der Reihenfolge und im Vorzeichen von denen der Matrix A selbst. Das ist allgemein so richtig, trotzdem ist aber eine Begründung dieser Eigenschaft nur mithilfe der Definition sehr mühsam. Einfacher nachvollziehbar wird die Aussage aber, wenn wir die Entwicklungsformel

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

anwenden, die wir in Mathematischer Hintergrund 13.1 gefunden haben. Exemplarisch wollen wir dieses Argument hier einmal ausführen.

Falls B aus A durch Vertauschen der Spalten l, k mit $l < k$ entsteht, so gilt

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{l,\sigma(k)} \cdots a_{k,\sigma(l)} \cdots a_{n\sigma(n)} .$$

Bezeichnet nun $\tau = \tau_{l,k}$ die Transposition von l und k, so schreibt sich dies als

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{l,\sigma(\tau(l))} \\ &\quad \cdots a_{k,\sigma(\tau(k))} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(\tau(1))} \cdots a_{l,\sigma(\tau(l))} \\ &\quad \cdots a_{k,\sigma(\tau(k))} \cdots a_{n\sigma(\tau(n))}\end{aligned}$$

(da ja τ die Zahlen $\neq l, k$ unberührt lässt). Nun haben wir aber, dass

$$\operatorname{sign}(\sigma) = -\operatorname{sign}(\sigma \circ \tau)$$

gilt, und mit σ durchläuft auch $\sigma \circ \tau$ alle Permutationen. Daher schreibt sich diese Beziehung auch als

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{\sigma \in S_n} -\operatorname{sign}(\sigma \circ \tau) a_{1,\sigma(\tau(1))} \\ &\quad \cdots a_{l,\sigma(\tau(l))} \cdots a_{k,\sigma(\tau(k))} \cdots a_{n\sigma(\tau(n))} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} -\operatorname{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{l,\sigma(l)} \\ &\quad \cdots a_{k,\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= -\det A ,\end{aligned}$$

wie gewünscht.

Determinante der transponierten Matrix

Ist $A^\top$ die transponierte Matrix von A, so gilt

$$\det A = \det A^\top .$$

Beispiel

Wir betrachten als Beispiel wieder die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} ,$$

die wir schon untersucht haben und von der wir bereits wissen, dass $\det A = 7$.

Es ist

$$A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit den Streichungsmatrizen

$$\left(A^\top\right)_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(A^\top\right)_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left(A^\top\right)_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(A^\top\right)_{1,4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned}\det\left(\left(A^\top\right)_{1,1}\right) &= 11 , \quad \det\left(\left(A^\top\right)_{1,2}\right) = 2 , \\ \det\left(\left(A^\top\right)_{1,3}\right) &= -4 , \quad \det\left(\left(A^\top\right)_{1,4}\right) = -1 .\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\det\left(A^\top\right) &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot 11 + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot 2 \\ &\quad + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot (-4) + (-1)^{1+4} \cdot 2 \cdot (-1) \\ &= 7 \\ &= \det A .\end{aligned}$$

◀

Auch die Formel für die transponierte Matrix lässt sich einfach aus der Darstellung der Determinante mit der symmetrischen Gruppe herleiten.

Aus der Kombination der Formel zur Berechnung der Determinante der transponierten Matrix mit der zur Berechnung der Derterminante beim Vertauschen von zwei Spalten, erhalten wir folgende Aussage.

Determinanten und Zeilenvertauschungen

Geht B aus A durch das Vertauschen von zwei Zeilen hervor, so gilt

$$\det B = -\det A .$$

Beispiel

Diese Regel kann eingesetzt werden, um die Berechnung von Determinanten zu vereinfachen.

Wir betrachten dazu die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Vertauschen der Zeile 1 und 2 erhalten wir daraus die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hierfür gilt

$$\begin{aligned} \det B = {} & 2 \cdot \det(B_{1,1}) - 2 \cdot \det(B_{1,2}) \\ & + 3 \cdot \det(B_{2,1}) - 1 \cdot \det(B_{1,4}) \ . \end{aligned}$$

Nun ist aber in den Matrizen $B_{1,2}, B_{1,3}$ und $B_{1,4}$ jeweils die erste Spalte eine Nullspalte, sodass also

$$\det(B_{1,2}) = \det(B_{1,3}) = \det(B_{1,4}) = 0 \,,$$

und daher bleibt

$$\begin{aligned} \det B &= 2 \cdot \det(B_{1,1}) \\ &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 4 \,. \end{aligned}$$

wobei wir die Regel zur Berechnung der Determinante einer 3×3-Dreieicksmatrix angewendet haben.

Da B aus A durch Vertauschung zweier Zeilen hervorgegangen ist, erhalten wir daraus

$$\det A = -\det B = -4 \,.$$ ◀

Regeln vereinfachen das Rechnen mit Determinanten

Wir sind nun in der Lage, einige weitere Formeln zusammenzustellen, die uns das Rechnen mit Determinanten einer $n \times n$-Matrix A sehr erleichtern werden.

Rechenregeln für Determinanten

1. Für die $n \times n$-Einheitsmatrix E_n ist $\det \mathrm{E}_n = 1$.
2. Es gilt schon $\det A = 0$, wenn
   - eine Zeile von A die Nullzeile ist,
   - eine Spalte von A die Nullspalte ist,
   - eine Zeile von A Vielfaches einer anderen ist,
   - eine Spalte von A Vielfaches einer anderen ist.
3. Ist A eine obere oder untere Dreiecksmatrix, so gilt
   $$\det A = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdots a_{n,n} \,.$$
4. Entsteht A' aus A durch Multiplikation genau einer Zeile von A mit einer Zahl r, so gilt
   $$\det A' = r \cdot \det A \,.$$
   Das Gleiche gilt, wenn A' aus A durch Multiplikation genau einer Spalte von A mit einer Zahl r hervorgeht.
5. Für $A' = r \cdot A$ gilt
   $$\det A' = r^n \cdot \det A \,.$$
6. Entsteht A' aus A dadurch, dass wir ein Vielfaches einer Zeile von A zu einer anderen Zeile von A addieren, so gilt
   $$\det A' = \det A \,.$$
   Das Gleiche gilt, wenn A' aus A dadurch entsteht, dass wir ein Vielfaches einer Spalte von A zu einer anderen Spalte von A addieren.
7. Schreiben wir A als $(\boldsymbol{a}_1 \ \dots \ \boldsymbol{a}_n)$ mit Spaltenvektoren $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$, so gilt
   $$\begin{aligned} \det\left(\boldsymbol{a}_1 \ \dots \ \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_i' \ \dots \ \boldsymbol{a}_n\right) = {} & \det(\boldsymbol{a}_1 \ \dots \ \boldsymbol{a}_i \ \dots \ \boldsymbol{a}_n) \\ & + \det\left(\boldsymbol{a}_1 \ \dots \ \boldsymbol{a}_i' \ \dots \ \boldsymbol{a}_n\right) \ . \end{aligned}$$
   Die analoge Aussage gilt für die Zeilen von A.

Die Beschäftigung mit diesen Formeln ist eine sehr gute Übung zum Arbeiten mit Determinanten. Daher wollen wir exemplarisch Formel 6 nachrechnen. Wir nehmen an, A' entsteht aus A durch Addition eines Vielfachen der l-ten Zeile zur k-ten Zeile, wobei $l \neq k$.

Wir führen den Nachweis nach dem Prinzip der vollständigen Induktion (wie in Mathematischer Hintergrund 4.1 beschrieben).

Die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ sind uns schon aus den entsprechenden Regeln in Abschn. 13.1 bekannt. Wir können also annehmen, dass $n \geq 4$ und dass wir die Aussage für Determinanten kleinerer Dimension schon kennen.

Wir können auch annehmen, dass $l > 1$ und $k > 1$. Anderfalls vertauschen wir in A und A' geeignete Zeilen und ändern dadurch die Determinanten jeweils um ein Vorzeichen. Dann gilt aber

$$\det A' = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{1+l} a_{1,l} \cdot \det\left(A'_{1,l}\right) , \tag{13.12}$$

wobei $A'_{1,l}$ aus $A_{1,l}$ jeweils durch Addition eines Vielfachen der $(l-1)$-ten Zeile zur $(k-1)$-ten Zeile entsteht. Damit gilt also nach Induktionsvoraussetzung

$$\det\left(A'_{i,l}\right) = \det\left(A_{i,l}\right) \qquad \text{für } i = 1, \ldots n$$

und daher folgt aus Gl. (13.12)

$$\det A' = \det A .$$

Beispiel

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} .$$

Ohne jegliche explizite Rechnung erhalten wir, dass $\det A = 0$, denn die dritte Zeile ist das Doppelte der ersten Zeile. ◀

Beispiel

Ist A eine schiefsymmetrische $n \times n$-Matrix (gilt also $A^\top = -A$) und ist n ungerade, so gilt

$$\det A = 0 .$$

Da $A^\top = -A$, gilt nämlich nach den Regeln

$$\det A^\top = (-1)^n \cdot \det A = -\det A$$

(wobei wir auch noch ausgenutzt haben, dass n ungerade ist). Andererseits haben wir aber auch

$$\det A^\top = \det A ,$$

und daher muss $\det A = 0$ sein.

Diese Aussage gilt nicht für gerades n, denn

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 .$$ ◀

Eine wiederholte Anwendung der Regeln liefert sofort folgendes hilfreiches Resultat.

Determinanten und Linearkombinationen

Ist eine Zeile der Matrix A eine Linearkombination der anderen Zeilen, so gilt

$$\det A = 0 .$$

Beispiel

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} .$$

Ohne jegliche explizite Rechnung erhalten wir, dass $\det A = 0$, denn die dritte Zeile ist die Summe der ersten beiden Zeilen. ◀

Bei der Definition der Determinante haben wir die erste Zeile ausgezeichnet und ihr eine Sonderrolle eingeräumt. Das ist allerdings nur scheinbar so, denn durch die Vertauschungsoperationen können wir jede beliebige Zeile zur ersten machen, und durch Transponieren können wir die Rollen von Zeilen und Spalten vertauschen. Hieraus erhalten wir den Entwicklungssatz von Laplace.

Entwicklungssatz von Laplace

Für eine allgemeine $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

kann $\det A$ nach den folgenden Regeln berechnet werden:

1. **Entwicklung nach der *i*-ten Zeile:**
   Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

   $$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det\left(A_{i,j}\right) .$$

2. **Entwicklung nach der *j*-ten Spalte:**
   Für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

   $$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det\left(A_{i,j}\right) .$$

Teil III

Ferner folgt aus den Regeln durch wiederholtes Anwenden sofort:

Determinanten und Zeilenumformungen

Entsteht A' aus A durch eine der elementaren Zeilen- oder Spaltenumformungen

1. Addition des Vielfachen einer Zeile oder Spalte zu einer anderen,
2. Multiplikation einer Zeile oder einer Spalte mit einer Zahl $r \neq 0$,
3. Vertauschung von zwei Zeilen oder Spalten.

so gilt

$$\det A' \neq 0 \iff \det A \neq 0\,. \tag{13.13}$$

Ist A'' eine Normalform von A, so gilt

$$\det A'' \neq 0 \iff \det A \neq 0\,. \tag{13.14}$$

Ein wichtiges, aber schwieriges Resultat ist der Produktsatz.

Produktsatz

Sind A und B zwei $n \times n$-Matrizen, so gilt

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B\,.$$

Beispiel

Wir betrachten die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\det A = 40\,, \qquad \det B = 48\,.$$

Ferner ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 13 & 15 & 12 & 20 \\ 22 & 20 & 8 & 10 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

und

$$\det(A \cdot B) = 1920 = 40 \cdot 48\,.$$ ◄

Definition

Eine $n \times n$-Matrix heißt **regulär**, wenn $\det A \neq 0$.

Die Beziehung (13.14) besagt, dass A genau dann regulär ist, wenn das für seine Normalform gilt. Liegt aber A in Normalform vor, so ist es eine obere Dreiecksmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & \dots & a_{1,t} & a_{1,t+1} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2,t} & a_{2,t+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{t,t+1} & \dots & a_{t,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für ein } t \leq n\,,$$

wobei t der Rang von A ist, und ihre Determinante ist genau dann von 0 verschieden, wenn $t = n$.

Regularität und Rang

Für eine $n \times n$-Matrix A sind äquivalent:

1. A ist regulär.
2. $\mathrm{Rang}(A) = n$.

$n + 1$ vorgegebene Werte bestimmen ein eindeutiges Polynom vom Grad n

In vielen Anwendungen stellt sich das Problem, durch eine Folge von Punkten in der Ebene eine möglichst einfache Funktion eines vorgegebenen Typs zu legen. Häufig werden dabei Polynomfunktionen gesucht, da sich diese besonders einfach weiterverarbeiten (etwa integrieren oder differenzieren) und sich daher gut in numerischen Näherungsverfahren verwenden lassen (z. B. der numerischen Integration, Bd. 2, Abschn. 3.4).

Die Problemstellung kann dann wie folgt formuliert werden: Zu gegebenen Messpunkten $t_0, t_1, \dots, t_n$ ($t_i \neq t_j$) mit zugehörigen Messwerten $s_0, s_1, \dots, s_n$ finde ein Polynom P möglichst kleinen Grades mit $P(t_k) = s_k$ für alle $k = 0, 1, \dots, n$. Da zwei Punkte eine Gerade, also eine lineare Funktion, bestimmen und drei Punkte eine quadratische Funktion, ist es naheliegend, bei $n+1$ Messpunkten nach einem Polynom vom Grad n zu suchen, also einem Polynom der Form

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n\,.$$

Teil III

Die Bedingungen $P(t_k) = s_k$ führen nun zu den Beziehungen

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 t_0 + \cdots + a_n t_0^n &= s_0 \\ a_0 + a_1 t_1 + \cdots + a_n t_1^n &= s_1 \\ \vdots \qquad \ddots \qquad &\vdots \\ a_0 + a_1 t_n + \cdots + a_n t_n^n &= s_n\,, \end{aligned}$$

also (bei gegebenen $t_0, t_1, \ldots, t_n$) zu einem linearen Gleichungssystem in den Unbekannten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \ldots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \ldots & t_n^n \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix, die auch **Vandermonde-Matrix** $V(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ genannt wird, hat von 0 verschiedene Determinante (Aufgabe 13.17), und damit hat dieses Gleichungssystem eine eindeutige Lösung.

Existenz des Interpolationspolynoms

Es gibt ein eindeutig bestimmtes Polynom $P(x)$ vom Grad höchstens n mit $P(t_k) = s_k$ für alle $k = 0, 1, \ldots, n$.

Beispiel

Wir suchen ein Polynom vom Grad 3, das zu folgenden Messungen passt:

1.00	2.00	2.50	3.00
−0.6250	4.1250	9.5000	17.3750

(13.15)

Die augmentierte Matrix zu diesem Gleichungssystem ist

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1.000 & 1.000 & 1.000 & 1.000 & -0.625 \\ 1.000 & 2.000 & 4.000 & 8.000 & 4.125 \\ 1.000 & 2.500 & 6.250 & 15.625 & 9.500 \\ 1.000 & 3.000 & 9.000 & 27.000 & 17.375 \end{array}\right)$$

mit reduzierter Zeilenstufenform

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.125 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & -2.500 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 & 1.250 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.500 \end{array}\right).$$

Damit hat das Interpolationspolynom die Gestalt

$$P(x) = \frac{1}{8} - \frac{5}{2} \cdot x + \frac{5}{4} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x^3$$

und wir erhalten die Darstellung in Abb. 13.8.

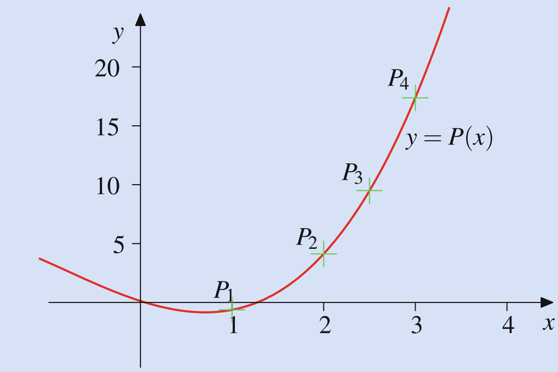

Abb. 13.8 Punkte und Interpolationspolynom

Der Gauß-Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme ist zwar sehr effizient, der Aufwand wächst aber trotzdem mit n^3. Da in der Anwendung oft sehr viele Messpunkte zu betrachten sind, kann das Verfahren aufwendig werden. Ein Grund liegt darin, dass wir für den Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens n die Basis $1, x, \ldots, x^n$ genommen haben, die nicht auf unser Problem zugeschnitten ist. Betrachten wir dagegen die **Lagrange-Polynome** vom Grand n, die definiert sind als

$$L_k(x) = \prod_{i \neq k} \frac{x - t_i}{t_k - t_i} \qquad \text{für } k = 0, \ldots, n\,,$$

so gilt für diese für jedes $k = 0, 1, \ldots, n$

$$L_k(t_k) = 1, \quad L_k(t_i) = 0 \quad \text{für } i \neq k\,,$$

woraus folgt, dass $L_0, \ldots, L_n$ eine Basis des Vektorraumes der Polynome vom Grad höchstens n ist, und woraus wir auch erhalten, dass

$$P(x) = s_0 \cdot L_0(x) + s_1 \cdot L_1(x) + \cdots + s_n \cdot L_n(x)$$

ein Polynom vom Grad höchstens n ist mit

$$P(t_k) = s_0 \cdot L_0(t_k) + s_1 \cdot L_1(t_k) + \cdots + s_n \cdot L_n(t_k) = s_k$$

für $k = 0, 1, \ldots, n$, also das Interpolationspolynom zu unserem Interpolationsproblem.

Beispiel

Wir betrachten wieder das Interpolationsproblem (13.15). Die Lagrange-Polynome in dieser Situation sind

$$\begin{aligned} L_0(x) &= -\frac{1}{3} \cdot (x-2) \cdot (x-2.5) \cdot (x-3), \\ L_1(x) &= 2 \cdot (x-1) \cdot (x-2.5) \cdot (x-3), \\ L_2(x) &= -\frac{8}{3} \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3), \\ L_3(x) &= 1 \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-2.5)\,, \end{aligned}$$

und damit ist unser Interpolationspolynom gegeben durch

$$\begin{aligned} P(x) = &\frac{0.625}{3} \cdot (x-2) \cdot (x-2.5) \cdot (x-3) \\ &+ 8.25 \cdot (x-1) \cdot (x-2.5) \cdot (x-3) \\ &- \frac{76}{3} \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \\ &+ 17.375 \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-2.5)\,. \end{aligned}$$

Ausmultipliziert erhalten wir natürlich auch hier wieder

$$P(x) = \frac{1}{8} - \frac{5}{2} \cdot x + \frac{5}{4} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x^3\,. \quad ◀$$

Eine anderer Ansatz zur vereinfachten Ermittlung des Interpolationspolynoms benutzt als Basis für den Raum der Polynome vom Grad höchstens n die **Newton-Polynome**

$$N_0(x) = 1, \quad N_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - t_j) \quad (k = 1, \ldots, n)\,.$$

Auch mit dieser Basis kann das Interpolationspolynom dargestellt werden,

$$P(x) = b_0 \cdot N_0(x) + b_1 \cdot N_1(x) + \cdots + b_n \cdot N_n(x)\,,$$

wobei in diesem Fall die b_k bestimmt sind durch ein Gleichungssystem, dessen Koeffizientenmatrix die untere Dreiecksmatrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & s_1 - s_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & s_2 - s_0 & (s_2 - s_0) \cdot (s_1 - s_0) & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & s_n - s_0 & (s_n - s_0) \cdot (s_n - s_1) & \ldots & \prod_{k=0}^{n-1} (s_n - s_k) \end{pmatrix}$$

ist. Daraus errechnen sich die Zahlen b_k sehr leicht mithilfe der (iterierten) **dividierten Differenzen** $[s_k, \ldots, s_l]$ $(0 \le k \le l \le n)$ der Länge $l - k$, die rekursiv wie folgt definiert sind:

- Ist $k = l$, so setzen wir $[s_k] = s_k$ für alle $k = 0, \ldots, n$.
- Ist $k < l$ und sind alle dividierten Potenzen der Länge $l-k-1$ schon definiert, so setzen wir

$$[s_k, s_{k+1}, \ldots, s_l] = \frac{[s_{k+1}, \ldots, s_l] - [s_k, \ldots, s_{l-1}]}{s_l - s_k}\,.$$

Dann gilt

$$b_k = [s_0, \ldots, s_k] \qquad \text{für } k = 0, \ldots, n\,.$$

Beispiel

Wir betrachten wieder das Interpolationsproblem (13.15). Die Newton-Polynome in dieser Situation sind

$$N_0(x) = 1, \quad N_1(x) = x - 1, \quad N_2(x) = (x-1) \cdot (x-2),$$
$$N_3(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-2.5)\,,$$

und die dividierten Potenzen berechnen sich als

$$\begin{aligned} &[s_0] = -0.625, && [s_1] = 4.125, && [s_2] = 9.500, \\ &[s_3] = 17.375, && [s_0, s_1] = 4.750, && [s_1, s_2] = 10.750, \\ &[s_2, s_3] = 15.750, && [s_0, s_1, s_2] = 4, && [s_1, s_2, s_3] = 5, \\ &[s_0, s_1, s_2, s_3] = \tfrac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Damit schreibt sich das Interpolationspolynom als

$$\begin{aligned} P(x) = &-\frac{5}{8} + \frac{19}{4} \cdot (x-1) + 4 \cdot (x-1) \cdot (x-2) \\ &+ \frac{1}{2} \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right)\,. \end{aligned}$$

Ausmultipliziert erhalten wir natürlich auch hier wieder

$$P(x) = \frac{1}{8} - \frac{5}{2} \cdot x + \frac{5}{4} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x^3\,. \quad ◀$$

Teil III

Die Regeln vereinfachen die Berechnung der Determinante

Für große n ist das Berechnen der Determinante sowohl über die Laplace-Entwicklung als auch über die Darstellung mit der Permutationsgruppe sehr arbeitsintensiv. In diesem Fall wird in der Praxis die Determinante dadurch berechnet, dass man die Matrix in Normalform überführt und sich die Operationen, die dabei durchgeführt werden und den Wert der Determinante ändern, merkt. Dieses Verfahren wächst in seiner Komplexität viel langsamer als etwa die Laplace-Entwicklung.

Wir betrachten dazu zunächst die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}\,. \tag{13.16}$$

Im ersten Schritt subtrahieren wir das Doppelte der ersten Zeile von der zweiten und das Dreifache der ersten Zeile von der Dritten und erhalten

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}\,.$$

Teil III

Dadurch hat sich die Determinante nicht geändert, $\det A_1 = \det A$. Nun multiplizieren wir die zweite Zeile mit $-\frac{1}{2}$ und merken uns, dass dadurch die Determinante mit $-\frac{1}{2}$ multipliziert wird. Wir erhalten

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

mit $\det A_2 = -\frac{1}{2} \cdot \det A_1 = -\frac{1}{2} \cdot \det A$. Wir addieren jetzt das Doppelte der zweiten Zeile zur Dritten, wodurch sich die Determinante nicht ändert, und erhalten

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit $\det A_3 = \det A_2 = -\frac{1}{2} \cdot \det A$. Diese Matrix A_3 ist nun eine obere Dreiecksmatrix, hat also die Determinante $1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1$. Um die Determinante von A zu bekommen, müssen wir berücksichtigen, dass in Schritt 2 die Determinante mit dem Faktor $-\frac{1}{2}$ multipliziert wurde und dies rückgängig machen. Wir erhalten also

$$\det A = (-2) \cdot \det A_3 = 2\,.$$

Für die Matrix (13.16) hätten wir die Determinante auch noch leicht nach dem Entwicklungssatz von Laplace oder dem Schema von Sarrus ausrechnen können. Schon etwas komplizierter ist das im Fall

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & -4 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Für diese Matrix empfiehlt es sich bereits, mit Zeilen- und mit Spaltenumformungen zu arbeiten. Zunächst vertauschen wir die erste und die dritte Zeile und erhalten

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 4 & -4 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hierdurch ändert sich das Vorzeichen, $\det B_1 = -\det B$. Wir subtrahieren viermal die erste Zeile von der zweiten, fünfmal die erste von der dritten und dreimal die erste von der vierten und erhalten

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & -4 & 5 & -22 \\ 0 & 1 & 15 & -21 \\ 0 & 1 & 8 & -11 \end{pmatrix}.$$

Hierdurch ändert sich die Determinante nicht, also $\det B_2 = \det B_1 = -\det B$. Nun vertauschen wir die zweite und die vierte Zeile:

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & -11 \\ 0 & 1 & 15 & -21 \\ 0 & -4 & 5 & -22 \end{pmatrix}.$$

Hierdurch ändert sich das Vorzeichen der Determinante, $\det B_3 = -\det B_2 = \det B$. Wir subtrahieren die zweite Zeile von der dritten und addieren sie viermal zur vierten:

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & -11 \\ 0 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 37 & -66 \end{pmatrix}.$$

Hierdurch ändert sich die Determinante nicht, also $\det B_4 = \det B_3 = \det B$. Im nächsten Schritt subtrahieren wir noch das $\frac{37}{7}$-fache der dritten Zeile von der vierten, um die Matrix

$$B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & -11 \\ 0 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{92}{7} \end{pmatrix}$$

zu erhalten. Hierdurch ändert sich die Determinante nicht, also $\det B_5 = \det B_4 = \det B$. Die Matrix ist eine obere Dreiecksmatrix mit

$$\det B_5 = 1 \cdot 1 \cdot 7 \cdot \left(-\frac{92}{7}\right) = -92\,,$$

und damit ist auch $\det B = -92$.

Beispiel

Es ist nicht notwendig, eine Matrix immer vollständig auf obere Dreiecksform zu bringen. Häufig reicht es aus, durch einige Reduktionsschritte die Komplexität zu reduzieren. Betrachten wir etwa die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

so erhalten wir durch Subtraktion des Doppelten der ersten Zeile von der zweiten, durch Subtraktion der ersten Zeile von der dritten und durch Addition der ersten Zeile zur vierten die Matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Das ändert die Determinante nicht, $\det A_1 = \det A$. Die Determinante von A_1 kann nun bereits relativ einfach durch Entwicklung nach der ersten Spalte berechnet werden:

$$\det A_1 = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -48\,,$$

wobei wir für die Berechnung der Determinante der 3×3-Matrix das Schema von Sarrus benutzen können. Damit erhalten wir also $\det A = -48$. Das ist in diesem Fall auch deshalb günstig, da sich in A_1 keine Zeile anbietet, die Matrix in einfacher Weise weiter auszuräumen.

Falls wir jedoch trotzdem mit Zeilen- und Spaltenumformungen weiter vereinfachen wollen, empfiehlt sich zunächst eine Spaltenoperation, etwa die Vertauschung der zweiten und dritten Spalte. Das ergibt

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hierdurch ändert sich das Vorzeichen der Determinante, also $\det A_2 = -\det A$. In A_2 kann nun mit der zweiten Zeile bequem weiter vereinfacht werden. Subtrahieren wir sie zweimal von der dritten Zeile und addieren wir sie einmal zur vierten, so erhalten wir

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 11 & 7 \end{pmatrix}.$$

Dadurch ändert sich die Determinante nicht, und es ist $\det A_3 = -\det A$. Nun können wir $\det A_3$ berechnen, indem wir zweimal nach der ersten Spalte entwickeln:

$$\begin{aligned} \det A_3 &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 11 & 7 \end{vmatrix} - 0 + 0 - 0 \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 11 & 7 \end{vmatrix} - 0 + 0 \\ &= (-1) \cdot 7 - (-5) \cdot 11 \\ &= 48 \end{aligned}$$

Also erhalten wir wieder $\det A = -\det A_3 = -48$.

Wir können aber in A_3 auch noch die dritte Zeile elfmal zur vierten addieren und erhalten

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -48 \end{pmatrix}.$$

Dadurch ändert sich die Determinante nicht, sodass $\det A_4 = -\det A$. Da $\det A_4 = 48$, erhalten wir auch auf diesem Weg $\det A = -48$.

Dieses Beispiel zeigt auch, dass sich bei der Vereinfachung einer Matrix zur Berechnung der Determinante Zeilen- und Spaltenoperationen mischen lassen. ◀

Die komplementäre Matrix entsteht aus Unterdeterminanten

Bei der Definition der Determinante haben die i,j-Streichungsmatrizen $A_{i,j}$ und ihre Determinanten eine wichtige Rolle gespielt. Wir setzen

$$\widetilde{a_{i,j}} = (-1)^{i+j} \det\left(A_{j,i}\right)$$

(beachten Sie dabei die Vertauschung der Indizes).

Definition

Die Matrix $\widetilde{A} := \left(\widetilde{a_{i,j}}\right)$ heißt die zu A **komplementäre Matrix** oder die zu A **adjunkte Matrix**.

Beispiel

Ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \tag{13.17}$$

so ist

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

◀

Ganz allgemein gilt: Ist

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine beliebige 2×2-Matrix, so ist

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{13.18}$$

Beispiel

Ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 8 & -4 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{13.19}$$

Teil III

so ist
$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$
◀

Wir berechnen nun explizit den Matrixeintrag $(\widetilde{A} \cdot A)_{k,l}$ an jeder Stelle k, l.

Ist $l = k$, so gilt nach dem Laplace-Entwicklungssatz (Entwicklung nach der k-ten Spalte)

$$\begin{aligned}
(\widetilde{A} \cdot A)_{k,k} &= \sum_{i=1}^{n} \widetilde{a_{k,i}} \cdot a_{i,k} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \det(A_{i,k}) \cdot a_{i,k} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{i,k} \cdot \det(A_{i,k}) \\
&= \det A\,.
\end{aligned}$$

Ist $l \neq k$, so betrachten wir die Matrix B, die aus A dadurch entsteht, dass wir die k-te Spalte von A durch die l-te Spalte von A ersetzen. Damit hat B zwei identische Spalten (an der Stelle k und der Stelle l), und daher gilt nach den Rechenregeln für Deteminanten
$$\det B = 0\,.$$
Andererseits gilt $B_{i,k} = A_{i,k}$, da B und A in allen Spalten außer der k-ten übereinstimmen. Entwickeln wir daher B nach der k-ten Spalte, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} b_{i,k} \cdot \det(B_{i,k}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{i,l} \cdot \det(A_{i,k}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \widetilde{a_{k,i}} \cdot a_{i,l} \\
&= (\widetilde{A} \cdot A)_{k,l}\,.
\end{aligned}$$

Eine vergleichbare Rechnung können wir für die Matrixeinträge $(A \cdot \widetilde{A})_{k,l}$ durchführen und erhalten daraus

$$\widetilde{A} \cdot A = A \cdot \widetilde{A} = \det A \cdot \mathrm{E}_n \qquad (13.20)$$

Beispiel

Für die Matrix A aus (13.17) gilt

$$A \cdot \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot \mathrm{E}_2$$

und $\det A = 5$. ◀

Beispiel

Für die Matrix A aus (13.19) gilt

$$\begin{aligned}
A \cdot \widetilde{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 8 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 1 \cdot \mathrm{E}_3
\end{aligned}$$

und $\det A = 1$. ◀

13.3 Determinanten und invertierbare Matrizen

Wir haben gesehen, dass $n \times n$-Matrizen A mit $\det A \neq 0$ in der Menge der Matrizen eine ausgezeichnete Rolle spielen, und diese Matrizen als reguläre Matrizen bezeichnet. In diesem Abschnitt wollen wir uns einer anderen ausgezeichneten Eigenschaft einiger Matrizen zuwenden.

Matrizen können eine Inverse haben

Definition

Eine $n \times n$-Matrizen A heißt **invertierbar**, wenn es eine $n \times n$-Matrix B gibt mit

$$A \cdot B = \mathrm{E}_n \quad \text{und} \quad B \cdot A = \mathrm{E}_n\,.$$

In diesem Fall heißt die Matrix B die **zu A inverse Matrix** und wird mit A^{-1} bezeichnet.

Zunächst stellt sich die Frage, ob vielleicht jede Matrix invertierbar ist. Betrachten wir dazu $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, also die Nullmatrix, so gilt für jede Matrix B

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und damit kann es keine Matrix B mit $A \cdot B = \mathrm{E}_2$ geben.

Bei den reellen Zahlen ist jede von 0 verschiedene reelle Zahl invertierbar. Ist also vielleicht jede von der Nullmatrix verschiedene Matrix invertierbar? Auch das ist nicht der Fall, wie das

Teil III

Anwendung: Stabwerke

Wir wollen noch einmal ganz allgemein ebene Stabwerke, wie wir sie in Kap. 9 eingeführt haben, betrachten und ihre Gleichgewichtsbedingungen untersuchen. Ein Fachwerk heißt **kinematisch bestimmt**, wenn die Lage aller Knotenpunkte eindeutig fixiert ist, und **statisch bestimmt**, wenn die Stabkräfte und die Lagerreaktionen (also die Gegenkräfte in den Auflagern) aus den Gleichgewichtsbedingungen eindeutig bestimmt werden können. Die Gleichgewichtsbedingungen liefern für jeden Knoten eine (vektorielle) Gleichung, woraus wir durch komponentenweise Betrachtung zwei skalare Gleichungen erhalten. Hat das Fachwerk also k Knoten, so erhalten wir daraus $2k$ Gleichungen. Bei räumlichen Stabwerken ergeben sich entsprechend $3k$ Gleichungen.

Zu bestimmen sind daraus (und aus den Lastkräften, die auf die Knoten wirken) die Stärken der Stabkräfte und der Gegenkräfte in den Auflagern, wobei die Gegenkräfte nach Richtungen aufgeschlüsselt werden, d. h., an einem auf Rollen gelagerten Auflager wirkt eine Gegenkraft, an einem festen Auflager sind es zwei (wie im Beispiel „Stabwerke" in Abschn. 9.2). Bezeichnet daher s die Anzahl der Stäbe und g die Anzahl der Lagerreaktionen, so ist

$$s + g = 2k$$

eine notwendige (aber nicht ausreichende) Bedingung für die statische Bestimmtheit des Fachwerks. Bei räumlichen Fachwerken ergibt sich entsprechend die Bedingung $s + g = 3k$, da in diesem Fall die vektorielle Gleichung für jeden Knoten drei Komponenten hat.

Obwohl die Bedingung $s+g = 2k$ (bzw. $s+g = 3k$ im räumlichen Fall) nicht ausreichend für die statische Bestimmtheit eines Stabwerks ist, wird die Größe

$$n = s + g - 2k$$

als Maß für die Bestimmtheit benutzt. Falls $n > 0$, so heißt das System n-fach statisch unbestimmt oder statisch überbestimmt. In dieser Situation reicht die Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen nicht aus, um alle Auflagerreaktionen und Schnittkräfte zu bestimmen. Im Fall $n < 0$ spricht man von einem n-fach unterbestimmten oder beweglichem System.

Betrachten wir wieder das Stabwerk, das durch Abb. 13.9 beschrieben wird und das wir bereits in Abb. 9.21 betrachtet haben, so gilt hier

$$k = 4, \quad s = 5, \quad g = 3\,.$$

Damit ist die notwendige Bedingung erfüllt. Wie wir in in der Fortführung dieses Anwendungsbeispiels in Abschn. 12.1 gesehen haben, ist die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems zu den Gleichgewichtsbedingungen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und hierfür gilt

$$\det A = -2\,.$$

Also lässt sich das Gleichungssystem zu diesem Stabwerk für alle Lastkräfte eindeutig lösen, und daher ist dieses Stabwerk für jede Art von Lastkräften an den Knoten statisch bestimmt.

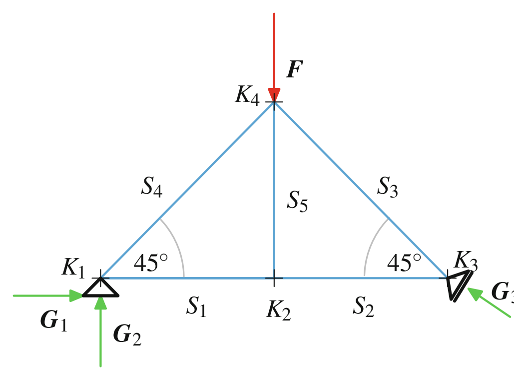

Abb. 13.9 Ein einfaches ebenes Stabwerk

Beachten Sie dabei, dass wir schon bei der Behandlung dieses Stabwerks in Abschn. 12.1 gesehen haben, dass die Matrix A den Rang 8 hat, dass also jedes Gleichungssystem mit A als Koeffizientenmatrix eindeutig lösbar ist und dass wir dort für Lastkräfte $\boldsymbol{F}$, wie in Abb. 13.9 eingezeichnet, die Gegenkräfte $\boldsymbol{G}_1$, $\boldsymbol{G}_2$ und $\boldsymbol{G}_3$ bereits bestimmt haben.

Obwohl $s + g = 2k$ nicht ausreichend ist für die statische Bestimmtheit eines Fachwerks, so ist doch das generische System, das diese Bedingung erfüllt, statisch bestimmt, denn das Verschwinden der Determinante der zu untersuchenden Koeffizientenmatrix führt zu einer Gleichung für die Winkel der Stab- und Auflagerkräfte, die nur selten erfüllt ist.

Beispiel $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ zeigt. Ist nämlich $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$ eine beliebige 2×2-Matrix, so gilt immer

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} b_{1,1} + b_{2,1} & b_{1,2} + b_{2,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

die zweite Zeile ist also immer die Nullzeile, und damit kann es auch hier keine Matrix B mit $A \cdot B = \mathrm{E}_2$ geben.

Kommentar Im Vektorraum $\mathbb{R}^{n,n}$ der $n \times n$-Matrizen haben wir neben der Matrizenaddition auch noch die Matrizenmultiplikation. Es ist leicht einzusehen, dass $(\mathbb{R}^{n,n}, +, \cdot)$ ein (nichtkommutativer) Ring mit Einselement E_n ist. Wir suchen nun die Elemente in diesem Ring, die ein multiplikatives Inverses haben. ◀

Es reicht, zu einer $n \times n$-Matrix A ein Linksinverses und ein Rechtsinverses zu finden, also eine Matrix B mit $B \cdot A = \mathrm{E}_n$ und eine Matrix C mit $A \cdot C = \mathrm{E}_n$. Dann gilt schon

$$B = B \cdot \mathrm{E}_n = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = \mathrm{E}_n \cdot C = C\,.$$

Genauso sehen wir, dass eine inverse Matrix, falls sie existiert, eindeutig ist.

Inverse Matrizen sind ein hilfreiches Instrument bei der Lösung linearer Gleichungssysteme. Ist nämlich A eine invertierbare Matrix und $\boldsymbol{x}$ eine Lösung des Gleichungssystems $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, so muss

$$\boldsymbol{x} = \mathrm{E}_n \cdot \boldsymbol{x} = A^{-1} \cdot A \cdot \boldsymbol{x} = A^{-1} \cdot \boldsymbol{b}$$

gelten. Setzen wir umgekehrt $\boldsymbol{x} = A^{-1} \cdot \boldsymbol{b}$, so ist

$$A \cdot \boldsymbol{x} = A \cdot A^{-1} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\,,$$

und wir erhalten folgendes Resultat:

Inverse Matrix und eindeutige Lösbarkeit

Ist A eine invertierbare Matrix mit Inverser A^{-1}, so hat das Gleichungssystem $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für jedes $\boldsymbol{b}$ die eindeutige Lösung

$$\boldsymbol{x} = A^{-1} \cdot \boldsymbol{b}\,.$$

Wir konzentrieren uns zunächst darauf, eine Rechtsinverse zu finden, also eine Matrix B mit $A \cdot B = \mathrm{E}_n$.

Existenz einer rechtsinversen Matrix

Genau dann existiert eine rechtsinverse Matrix B von A, wenn das Gleichungssystem

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{e}_i \tag{13.21}$$

für jedes $i = 1, \ldots, n$ lösbar ist, wobei $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Ist in diesem Fall $\boldsymbol{v}_i$ eine Lösung von $A \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{e}_i$ und ist B die Matrix mit den Spaltenvektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, so gilt

$$A \cdot B = \mathrm{E}_n\,. \tag{13.22}$$

Ist nämlich B eine Rechtsinverse zu A und ist $B_{\bullet,i}$ der i-te Spaltenvektor von B, so gilt nach Definition der Matrizenmultiplikation gerade $A \cdot B_{\bullet,i} = \mathbf{e}_i$, und damit sind alle fraglichen Gleichungssysteme lösbar.

Sind nun umgekehrt $\boldsymbol{v}_i$ Lösungen von $A \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ und ist B die Matrix mit den $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ als Spaltenvektoren, so ist – wiederum nach Definition der Matrizenmultiplikation – $A \cdot B$ die Matrix mit den Spaltenvektoren $A \cdot \boldsymbol{v}_1, \ldots, A \cdot \boldsymbol{v}_n$, also

$$A \cdot B = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \ldots\ \mathbf{e}_n) = \mathrm{E}_n\,.$$

Bei der Bestimmung der Lösungen von Gleichungssystemen in Abschn. 12.3 haben wir gesehen, dass das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \mathbf{e}_i$ genau dann lösbar ist, wenn $\mathbf{e}_i \in \mathrm{Bild}(A)$. Damit ist das Gleichungssystem (13.21) genau dann für jedes i lösbar, wenn der Untervektorraum $\mathrm{Bild}(A) \subset \mathbb{R}^n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ enthält, und das bedeutet schon

$$\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{R}^n\,,$$

also $\mathrm{Rang}(A) = n$. Deshalb existiert zu A genau dann eine rechtsinverse Matrix, wenn $\mathrm{Rang}(A) = n$. Das wiederum ist äquivalent dazu, dass A regulär ist, also zu $\det A \neq 0$. Setzen wir daher $C = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A}$ mit der Komplementärmatrix $\widetilde{A}$ von A, so gilt nach Gl. (13.20)

$$C \cdot A = A \cdot C = \mathrm{E}_n\,,$$

sodass C schon eine Inverse von A ist (die dann natürlich mit der rechtsinversen Matrix B von oben übereinstimmt). Wir haben damit gezeigt:

Deteminanten und Regularität

Für eine $n \times n$-Matrix A sind folgende Aussagen äquivalent:

1. A ist regulär.
2. A ist invertierbar.
3. $\mathrm{Rang}(A) = n$.
4. $\mathrm{Nul}(A) = 0$.
5. A besitzt eine rechtsinverse Matrix.

Ist A regulär, so auch $A^\top$, da $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A^\top)$, und es gilt

$$A^\top \cdot \left(\left(A^{-1}\right)^\top\right) = \left(A^{-1} \cdot A\right)^\top = \mathrm{E}_n^\top = \mathrm{E}_n\,,$$

also:

Inverse der transponierten Matrix

Ist A invertierbar, so ist auch $A^\top$ invertierbar und

$$\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top.$$

Teil III

Die inverse Matrix wird durch Zeilenumformungen bestimmt

Wir haben schon gesehen:

Inverse Matrix und Komplementärmatrix

Ist A invertierbar und ist $\widetilde{A}$ die Komplementärmatrix von A, so ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A}.$$

Beispiel

Ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 8 & -4 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

so ist, wie wir schon gesehen haben, $\det A = 1$ und

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Daher ist $A^{-1} = \widetilde{A}$. ◀

Da wir die Komplementärmatrix einer 2×2-Matrix in Formel (13.18) explizit beschrieben haben, erhalten wir sofort:

Inverse einer 2 × 2-Matrix

Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine 2×2-Matrix, so ist A genau dann invertierbar, wenn $ad - bc \neq 0$, und in diesem Fall ist

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Für große n nimmt der Rechenaufwand dieses Verfahrens aber sehr stark zu und wird zusehends unpraktikabel. Es gibt jedoch eine Methode, deren Komplexität weniger stark mit n steigt. Zur Bestimmung einer inversen Matrix reicht es nämlich, eine rechtsinverse Matrix von A zu ermitteln, und dazu müssen wir, wie wir schon gesehen haben, nur die Gleichungssysteme (13.21), also $A \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{e}_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ lösen. In Abschn. 12.1 haben wir bereits festgestellt, dass wir diese Gleichungssysteme alle in einem Durchgang durch Betrachtung der erweiterten augmentierten Matrix $(A \,|\, \mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \ldots\ \mathbf{e}_n)$ und Überführen dieser Matrix in Normalform lösen können. Ferner können wir diese erweiterte Matrix, falls A den Rang n hat, nur durch Zeilenoperationen auf die Normalform

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & & & & \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \ldots & \boldsymbol{b}_n \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & & & & \end{array}\right)$$

bringen und wir erhalten aus Formel (13.22)

$$A^{-1} = (\boldsymbol{b}_1\ \ldots\ \boldsymbol{b}_n)\ . \tag{13.23}$$

Beispiel

Betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

so gehen wir vor wie folgt:

$$\begin{array}{ll} (A \,|\, \mathbf{e}_1\, \mathbf{e}_2) = & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \\ (-1) \cdot \mathrm{II} & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \\ \mathrm{I} - 2 \cdot \mathrm{II} & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right), \end{array}$$

wobei wir in der linken Spalte die durchgeführten Zeilenoperationen notieren. $\mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I}$ bedeutet also: Subtrahiere das Doppelte der ersten Zeile von der zweiten. Wir erhalten aus (13.23), dass A invertierbar ist mit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

In der Tat gilt

$$A \cdot A^{-1} = \mathrm{E}_2 = A^{-1} \cdot A.$$ ◀

Beispiel

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Teil III

gehen wir vor wie folgt:

$$(A \mid \mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{I} \leftrightarrow \text{II} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{III} - \text{I} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{III} - \text{II} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$(-1) \cdot \text{III} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \text{II} - 2 \cdot \text{III} \\ \text{I} - 2 \cdot \text{III} \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\text{I} - 2 \cdot \text{II} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Wir erhalten auch hier, dass A invertierbar ist mit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$ ◀

Beispiel

Auch im Fall der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

machen wir diesen Ansatz und erhalten

$$(A \mid \mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{I} \leftrightarrow \text{II} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{III} - \text{I} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{III} - \text{II} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

An dieser Stelle bricht der Algorithmus ab. Die letzte Zeile von A ist zur Nullzeile geworden, und damit hat A nicht den vollen Rang 3, ist also auch nicht invertierbar. ◀

Im Allgemeinen ist es nicht einfach zu entscheiden, ob eine $n \times n$-Matrix invertierbar ist (speziell für großes n) und gegegebenenfalls ihre inverse Matrix zu berechnen. Einige Regeln helfen dabei manchmal.

Regeln für die Invertierbarkeit

1. Sind A und B invertierbare $n \times n$-Matrizen, so ist auch $A \cdot B$ invertierbar und
$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$
2. Ist A eine Diagonalmatrix,
$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix},$$
so ist A genau dann invertierbar, wenn $d_i \neq 0$ für alle i, und in diesem Fall gilt
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}.$$
3. Ist A eine $n \times n$-Matrix mit $A^l = 0$ für ein $l \in \mathbb{N}$, so ist $\mathrm{E}_n - A$ invertierbar und
$$(\mathrm{E}_n - A)^{-1} = \mathrm{E}_n + A + A^2 + \dots + A^{l-1}. \quad (13.24)$$
4. Ist A eine $n \times n$-Matrix mit $A^l = 0$ für ein $l \in \mathbb{N}$, so ist A nicht invertierbar.

Die ersten beiden Aussagen lassen sich unmittelbar nachrechnen. Zum Nachweis der dritten setzen wir

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}_n - A)\cdot\left(\mathrm{E}_n + A + A^2 + \cdots + A^{l-1}\right) &= \mathrm{E}_n + A + A^2 + \cdots + A^{l-1}\\ &\quad - A - A^2 - \cdots - A^{l-1} - A^l\\ &= \mathrm{E}_n - A^l\\ &= \mathrm{E}_n\end{aligned}$$

an, also ist $\mathrm{E}_n - A$ invertierbar. Für die vierte Aussage beachten wir, dass aus $A^l = 0$ natürlich $\det\left(A^l\right) = 0$ folgt. Nach dem Produktsatz bedeutet dies, dass $\det A = 0$, und damit ist A nicht invertierbar.

Definition

Eine Matrix A mit $A^l = 0$ für ein $l \in \mathbb{N}$ heißt **nilpotent**.

Die Invertierbarkeit von $A \cdot B$ ist äquivalent zu $\det(A \cdot B) \neq 0$. Nach dem Produktsatz für Determinanten folgt aber daraus $\det A \neq 0$ und $\det B \neq 0$, also:

Produktsatz für invertierbare Matrizen

Sind A und B zwei $n\times n$-Matrizen und ist $A\cdot B$ invertierbar, so sind auch A und B invertierbar. Entsprechend haben in diesem Fall auch A und B den vollen Rang n.

Ist A invertierbar, so liefert der Produktsatz

$$1 = \det \mathrm{E}_n = \det\left(A \cdot A^{-1}\right) = \det A \cdot \det A^{-1}\,,$$

also

Determinante der inversen Matrix

Ist A invertierbar, so ist

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,.$$

Die cramersche Regel hilft, Formeln für Lösungen zu finden

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir nochmal zum Ausgangspunkt dieses Kapitels zurückkehren, nämlich zu linearen Gleichungssystemen

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad (13.25)$$

mit einer $n\times n$-Koeffizientenmatrix A. Wir schreiben hierfür $A = \left(\boldsymbol{a}^{(1)}\ \boldsymbol{a}^{(2)}\ \ldots\ \boldsymbol{a}^{(n)}\right)$ mit Spaltenvektoren $\boldsymbol{a}^{(i)}$ und setzen

$$A_k(\boldsymbol{b}) = \left(\boldsymbol{a}^{(1)}\ \ \ldots\ \ \boldsymbol{a}^{(k-1)}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{a}^{(k+1)}\ \ \ldots\ \ \boldsymbol{a}^{(n)}\right),$$

wir ersetzen also die k-te Spalte von A durch $\boldsymbol{b}$.

Ist A invertierbar, so ist die eindeutige Lösung des Gleichungssystems (13.25) durch $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ gegeben. Beschreiben wir A^{-1} mit der Komplementärmatrix, so bedeutet das

$$\begin{aligned}x_k &= \left(A^{-1}\cdot\boldsymbol{b}\right)_k\\ &= \sum_{l=1}^{n} \frac{\widetilde{a_{k,l}}}{\det A}\cdot b_l\\ &= \frac{1}{\det A}\cdot\sum_{l=1}^{n}(-1)^{k+l}\det\left(A_{l,k}\right)\cdot b_l\,.\end{aligned}$$

Berechnen wir andererseits $\det\left(A_k(\boldsymbol{b})\right)$ durch Entwicklung nach der k-ten Spalte, so ergibt sich

$$\det\left(A_k(\boldsymbol{b})\right) = \sum_{l=1}^{n}(-1)^{k+l} b_l \cdot \det\left(A_{l,k}\right)\,,$$

da $A_k(\boldsymbol{b})_{l,k} = A_{l,k}$, und wir erhalten die cramersche Regel.

Die cramersche Regel

Ist A invertierbar, so ist die eindeutige Lösung $\boldsymbol{x}$ von

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

gegeben durch

$$x_k = \frac{\det\left(A_k(\boldsymbol{b})\right)}{\det A} \qquad \text{für } k = 1, \ldots, n\,.$$

Beispiel

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= 2\\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0\\ x_2 + x_3 &= 2\,,\end{aligned}$$

haben also

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}2\\ 0\\ 2\end{pmatrix}.$$

Teil III

Teil III

Anwendung: Input-Output-Analyse (offenes Modell)

Wir betrachten eine Volkswirtschaft, deren Produktionsaktivitäten sich in drei Sektoren gliedert: Energie E, Rohstoffe und Lebensmittel R sowie industrielle Produktion I. Um Energie im Verkaufswert von einer Geldeinheit zu erzeugen, benötigt der Sektor E Energie aus seiner eigenen Produktion im Verkaufswert von 0.1 Geldeinheiten (GE), Rohstoffe des Sektors R im Wert von 0.4 GE und industrielle Fertigprodukte des Sektors I im Wert von 0.1 GE. Entsprechend benötigt der Sektor R für die Erzeugung von Produkten im Verkaufswert von 1 GE Produkte im Wert von 0.3 GE aus dem Sektor E, 0.1 GE aus dem eigenen Sektor R und 0.1 GE vom Sektor I, und der Sektor I benötigt für die Erzeugung von Produkten im Verkaufswert von 1 GE Produkte im Wert von 0.2 GE aus dem Sektor E, 0.3 GE aus dem Sektor R und 0.1 GE aus dem eigenen Sektor I. Diese Inputfaktoren fassen wir zu einer Inputmatrix A wie folgt zusammen:

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

In der ersten Zeile steht also der Bedarf an Energie, in der zweiten der an Rohstoffen und in der dritten der an Industrieprodukten. Ist daher $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} e \\ r \\ i \end{pmatrix}$ der Vektor, der die gesamte Produktion beschreibt (mit den offensichtlichen Bezeichnungen, also e für die Produktion des Sektors E etc.), so ist $A \cdot \boldsymbol{p}$ der wertmäßige Anteil des Gesamtoutputs, der unmittelbar in die Produktion einfließt. Der Wert der benötigten Energie etwa ist $0.1 \cdot e + 0.3 \cdot r + 0.2 \cdot i$. Neben der internen Verwendung sind durch die Produktion aber auch der Bedarf der Konsumenten der Volkswirtschaft und die Exportnachfrage zu decken. Wir nehmen an, dass insgesamt eine Nachfrage nach Energie im Wert von 46 Mrd. GE, nach Rohstoffen und Lebensmittel im Wert von 58 Mrd. GE und nach industriellen Fertigprodukten im Wert von 142 Mrd. GE gedeckt werden muss, und fassen diese Werte zu einem Nachfragevektor $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 46 \\ 58 \\ 142 \end{pmatrix}$ zusammen. Der Output der Volkswirtschaft muss also den internen Bedarf der Produktion und die Nachfrage der Konsumenten abdecken. Das führt zu der Bedingung

$$\boldsymbol{p} = A \cdot \boldsymbol{p} + \boldsymbol{n}$$

oder, nach Umstellen, zu

$$(\mathrm{E}_3 - A) \cdot \boldsymbol{p} = \boldsymbol{n}.$$

In dieser Situation ist die Matrix

$$\mathrm{E}_3 - A = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & 0.9 & -0.3 \\ -0.1 & -0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

invertierbar. Ihre Inverse kann mit Zeilenumformungen ermittelt werden und ist

$$L = \frac{1}{559} \cdot \begin{pmatrix} 780 & 290 & 270 \\ 390 & 790 & 350 \\ 130 & 120 & 690 \end{pmatrix}.$$

und daher berechnet sich der Gesamtoutput der Volkswirtschaft als $\boldsymbol{p} = L \cdot \boldsymbol{n}$, also als

$$\begin{pmatrix} e \\ r \\ i \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} 46 \\ 58 \\ 142 \end{pmatrix} = \frac{1}{559} \cdot \begin{pmatrix} 91\,040 \\ 113\,460 \\ 110\,920 \end{pmatrix}.$$

Mit diesen (monetär bewerteten) Outputmengen ist die Volkswirtschaft also in einem Gleichgewichtszustand und kann sowohl den Bedarf für die Produktion als auch die Nachfrage exakt befriedigen.

Dieser Ansatz verallgemeinert sich in offensichtlicher Weise auf eine Volkswirtschaft mit n Sektoren $S_1, \ldots S_n$ und eine $n \times n$-Inputmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

in der $a_{i,j}$ für den Wert der Produkte des Sektors S_i steht, der in die Produktion von Sektor S_j eingeht. Er lässt sich auch auf ein einzelnes Unternehmen und die Produkte, die in dem Unternehmen (für die interne Weiterverarbeitung und die Deckung der externen Nachfrage) verwendet werden, übertragen.

Diese Input-Output-Analyse wurde wesentlich von *Wassily Leontief* (1905–1999) begründet, der hierfür 1973 den Wirtschaftsnobelpreis erhielt. Die Matrix $L = (\mathrm{E}_n - A)^{-1}$ heißt deshalb auch die **Leontief-Inverse** von A.

Die Matrix A ist im Allgemeinen nicht nilpotent, daher kann $(\mathrm{E}_n - A)^{-1}$ nicht nach Formel (13.24) berechnet werden. Allerdings sind die Einträge von A in der Regel sehr klein, sodass die Einträge von A^l, der l-ten Potenz von A, im Allgemeinen sehr schnell gegen 0 gehen. In diesen Fällen kann $(\mathrm{E}_n - A)^{-1}$ durch eine Reihe

$$(\mathrm{E}_n - A)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} A^l$$

bestimmt werden.

Da $\det A = -2$ kann die cramersche Regel angewendet werden und wir erhalten

$$x_1 = \frac{-1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$x_2 = \frac{-1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$x_3 = \frac{-1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 .$$ ◀

Achtung Die cramersche Regel zeigt, dass sich die Lösung eines linearen Gleichungssystems formelmäßig aus den Daten des Gleichungssystems bestimmen lässt. Daher ist sie gut geeignet, Formeln und Zusammenhänge abzuleiten. Für große n ist sie aber keine praktikable Methode, um die Lösung eines Gleichungssystems numerisch zu bestimmen. Der Rechenaufwand, der damit verbunden ist, ist viel höher als der, der sich aus dem gaußschen Eliminationsverfahren ergibt. ◀

Determinanten können mit den gleichen Berechnungsregeln auch für komplexe Matrizen definiert werden. So gilt also auch für komplexe 2×2-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} \\ z_{2,1} & z_{2,2} \end{pmatrix}$$

die Formel

$$\det A = z_{1,1} \cdot z_{2,2} - z_{1,2} \cdot z_{2,1} .$$

Beispiel

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \mathrm{i}-1 \end{pmatrix}$$

hat die Determinante

$$\det A = 1 \cdot (\mathrm{i}-1) - \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = \mathrm{i} - 1 - (-1) = \mathrm{i} .$$ ◀

Die Aussagen über Determinanten übertragen sich entsprechend auf die komplexe Situation. Insbesondere ist eine komplexe Matrix genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante von 0 verschieden ist. Das gilt also für unsere Matrix A, und ihre Inverse berechnet sich wie im reellen Fall mit der erweiterten Matrix:

$$(A \,|\, \mathrm{E}_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \mathrm{i} & 1 & 0 \\ \mathrm{i} & \mathrm{i}-1 & 0 & 1 \end{array}\right) ,$$

Subtrahieren wir das i-fache der ersten Zeile von der zweiten, so erhalten wir

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 1 \end{array}\right) .$$

Division der zweiten Zeile durch i ergibt

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\mathrm{i} \end{array}\right) .$$

Subtraktion des i-fache der zweiten Zeile von der ersten liefert

$$(\mathrm{E}_2 \mid A^{-1}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1+\mathrm{i} & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -\mathrm{i} \end{array}\right)$$

und damit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & -1 \\ -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} .$$

Für $n \geq 3$ übertragen sich die Definitionen, Formeln und Aussagen entsprechend.

13.4 Orthogonale Matrizen und Isometrien

In Abschn. 11.2 haben wir den Begriff des euklidischen Vektorraumes kennengelernt, also einen Vektorraum zusammen mit dem Skalarprodukt auf diesem Vektorraum betrachtet. Dieses Konzept steht in engem Zusammenhang mit einer speziellen Art von Matrizen.

Definition

Eine $n \times n$-Matrix A heißt **orthogonal**, wenn die Spalten von A eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bilden.

Beispiel

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

ist orthogonal. ◀

Bezeichnen wir mit $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ die Spaltenvektoren einer orthogonalen Matrix A, so gilt nach Definition der Matrizenmultiplikation

$$A^\top \cdot A = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 \rangle & \ldots & \langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_1 \rangle \\ \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2 \rangle & \ldots & \langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_1 \rangle \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_n \rangle & \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_n \rangle & \ldots & \langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_n \rangle \end{pmatrix} = \mathrm{E}_n ,$$

Teil III

13.2 Mathematischer Hintergrund: Invertierbare Matrizen und Koordinatentransformationen

Eine $n \times n$-Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn sie den Rang n hat, wenn also die Spalten $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ der Matrix A linear unabhängig (und damit schon eine Basis von $\mathbb{R}^n$) sind. Ist umgekehrt $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ und ist A die Matrix mit $\boldsymbol{v}_1 \ldots, \boldsymbol{v}_n$ als Spalten, so hat diese Matrix den Rang n, ist also invertierbar. Dadurch ergibt sich ein enger Zusammenhang zwischen invertierbaren Matrizen und Basen. Diese Beziehung ermöglicht es auch, von einer Basis zu einer anderen zu wechseln.

Wir betrachten eine Basis $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ von $\mathbb{R}^n$ und die Matrix V mit $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ als Spalten. Ein $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ hat die Koordinatendarstellung $\boldsymbol{x} = r_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + r_n \cdot \mathbf{e}_n$. Genauso können wir aber $\boldsymbol{x}$ auch bzgl. der Basis $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ beschreiben, $\boldsymbol{x} = s_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + \cdots + s_n \cdot \boldsymbol{v}_n$. Die Verbindung zwischen den $r_1, \ldots, r_n$ und den $s_1, \ldots, s_n$ wird nun durch die Matrix V hergestellt. Es gilt

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = V \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = V^{-1} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir etwa in $\mathbb{R}^2$ die Basis $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, so ist $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, und für einen beliebigen Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ mit der Darstellung $\boldsymbol{x} = s_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + s_2 \cdot \boldsymbol{v}_2$ gilt dann in der Tat in den üblichen Koordinaten

$$\boldsymbol{x} = s_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 + s_2 \\ s_1 + 2s_2 \end{pmatrix} = V \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix V beschreibt also den **Basiswechsel** von $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ zur Standardbasis. Ist $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^n$ und W die Matrix für den Basiswechsel von $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ zur Standardbasis, so ist $W^{-1} \cdot V$ die Transformationsmatrix von der Basis $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ zur Basis $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$.

Wir wollen das auf lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ anwenden. Eine solche lineare Abbildung wird (bzgl. der Standardkoordinaten) durch eine $m \times n$-Matrix A beschrieben. Wir haben aber bereits gesehen, dass es auch bzgl. beliebiger Basen $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ von $\mathbb{R}^m$ eine $m \times n$-Matrix B gibt, die die lineare Abbildung bzgl. dieser Basen beschreibt, so dass also für

$$\boldsymbol{x} = r_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 + \cdots + r_n \cdot \boldsymbol{u}_n, \qquad f(\boldsymbol{x}) = s_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + \cdots + s_m \cdot \boldsymbol{v}_m$$

gilt: $\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$

Der Zusammenhang zwischen A und B wird durch die Transformationsmatrizen hergestellt: Beschreibt V den Basiswechsel von der Basis $\mathcal{B}$ zur Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ und U den Basiswechsel von der Basis $\mathcal{A}$ zur Standardbasis des $\mathbb{R}^m$, so gilt $B = U^{-1} \cdot A \cdot V$ und $A = U \cdot B \cdot V^{-1}$.

Betrachten wir die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

und die beiden Basen $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, wobei

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

so sind die Basiswechselmatrizen gegeben durch

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bzgl. der Standardbasis wird f beschrieben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und die Matrix

$$B = U^{-1} \cdot A \cdot V = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschreibt tatsächlich die lineare Abbildung f bzgl.dieser beiden Basen, wie wir in Abschn. 12.3 explizit nachgerechnet haben.

Für $n = m$ und $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, erhalten wir $B = V^{-1} \cdot A \cdot V$ und nennen in diesem Fall B die darstellende Matrix von f bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

Ist etwa $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

(bzgl. der Standardbasis) beschrieben ist, so wird f bzgl. der Basis $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dargestellt durch die Matrix

$$B = V^{-1} \cdot A \cdot V = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Teil III

13.3 Mathematischer Hintergrund: Determinanten linearer Abbildungen

Quadratische $n \times n$-Matrizen entsprechen linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, und umgekehrt definiert jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine quadratische $n \times n$-Matrix. Daher ist es naheliegend zu versuchen, den Determinantenbegriff auf lineare Abbildungen auszudehnen.

Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ wird in den Standardkoordinaten beschrieben durch eine $n \times n$-Matrix. Für die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit } f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

etwa ist das die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wählen wir nun eine andere Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^n$, so kann f auch bzgl. $\mathcal{B}$ durch eine Matrix beschrieben werden, wie wir bereits in Abschn. 12.3 festgestellt haben. Ist V die Matrix, die den Basiswechsel von $\mathcal{B}$ zur Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ (im Sinne von Mathematischer Hintergrund 13.2) beschreibt, und ist B die darstellende Matrix von f bzgl. der Basis $\mathcal{B}$, so gilt

$$B = V^{-1} \cdot A \cdot V$$

Betrachten wir im Beispiel etwa die Basis

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

so gilt

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$B = V^{-1} \cdot A \cdot V = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Das ist auch tatsächlich die Matrix, die f bzgl. der Basis $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ beschreibt, d. h.

$$f(s_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + s_2 \cdot \boldsymbol{v}_2) = (-2s_1 - 5s_2) \cdot \boldsymbol{v}_1 + (2s_1 + 4s_2) \cdot \boldsymbol{v}_2 ,$$

wie leicht nachgerechnet werden kann. In jedem Fall erhalten wir

$$\begin{aligned} \det B &= \det\left(V^{-1} \cdot A \cdot V\right) \\ &= \det V^{-1} \cdot \det A \cdot \det V \\ &= \frac{1}{\det V} \cdot \det A \cdot \det V \\ &= \det A . \end{aligned}$$

Daher setzen wir

$$\det f = \det A ,$$

wobei A die darstellende Matrix von f bzgl. einer (beliebigen, aber fest gewählten) Basis des $\mathbb{R}^n$ ist.

Im Beispiel gilt

$$\det f = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad \left(= \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \right).$$

Mithilfe der Determinante können wir nun lineare Abbildungen studieren. Eine Abbildung $g : M \longrightarrow N$ heißt umkehrbar, wenn es eine Abbildung $g^{-1} : N \longrightarrow M$ gibt mit

$$g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_N, \quad g^{-1} \circ g = \mathrm{id}_N .$$

Äquivalent dazu ist, dass g injektiv und surjektiv ist.

Wir behaupten, dass eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ genau dann umkehrbar ist, wenn $\det f \neq 0$. Ist in diesem Fall A die Matrix von f bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$, so ist ja $\det A = \det f \neq 0$. Daher ist die Matrix A invertierbar, und $f^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist die lineare Abbildung, die durch die Matrix A^{-1} (bzgl. der Standardbasis) gegeben ist. Es gilt dann nämlich

$$f^{-1}(f(\boldsymbol{x})) = f^{-1}(A \cdot \boldsymbol{x}) = A^{-1} \cdot A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$$

und entsprechend

$$f(f^{-1}\boldsymbol{x})) = f(A^{-1} \cdot \boldsymbol{x}) = A \cdot A^{-1} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} .$$

Also ist f umkehrbar, wenn A invertierbar ist, d. h. wenn $\det f \neq 0$. Ist dagegen $\det f = 0$, so ist auch $\det A = 0$ (wobei wieder A die Matrix von f bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ ist), und daher gibt es ein $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ mit $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Damit gilt in diesem Fall

$$f(\boldsymbol{x}) = A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} = f(\boldsymbol{0}) .$$

Folglich gibt es zwei Vektoren, die unter f auf denselben Punkt abgebildet werden, und damit kann die Abbildung f nicht mehr umkehrbar sein.

Im Beispiel ist $\det f = 2$, also ist f umkehrbar, und die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit } f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix},$$

denn

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teil III

Anwendung: Bestimmung der Determinante, der inversen Matrix und cramersche Regel in MATLAB

In MATLAB kann die Determinante einer Matrix mit dem Befehl `det` wie folgt ermittelt werden:

```
A = [1,1,1,1;1,2,3,4;1,3,5,8;2,-1,5,7];
d = det(A)
d =
   -9.0000
```

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 8 \\ 2 & -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

hat also die Determinante $d = -9$.

Die cramersche Regel ist nicht unmittelbar in MATLAB umgesetzt, lässt sich allerdings sehr einfach durch einen Funktionsbaustein realisieren

```
function [ x ] = cramer( A,b )
% function module to calculate solutions
% of linear equations via Cramer's rule
% input:  invertible matrix A, vector b
% output: vector x of solutions of A*x=b
[n,m] = size(A); l = size(b);
% check whether Cramer's rule may be
    applied
if (n~=m) | (n~=l)
    error('Fehlerhafte Eingabe.');
end
if det(A) == 0
    error('Determinante verschwindet');
end
% initialize and determine det(A)
x=zeros([1,n]); d = det(A);
% calculate components of solution
for i=1:n
    B = A;
    B(:,i)=b;   % replace column i by b
    x(i)=det(B)/det(A);
end
end
```

Dieser Baustein kann wie folgt eingesetzt werden:

```
x=cramer([1,2,3;2,3,4;3,5,6],[2;4;3])
x =
    5.0000   -6.0000    3.0000
```

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 3 \end{aligned}$$

hat also die eindeutige Lösung $x_1 = 5$, $x_2 = -6$ und $x_3 = 3$.

Allerdings ist diese Methode für große n aus Performancegründen nicht zu empfehlen.

Die Inverse einer Matrix wird in MATLAB mit dem Befehl `inv` bestimmt:

```
A = [1,1,0,1;0,1,1,0;0,1,0,1;1,0,1,0];
B = inv(A)
B =
     1      0     -1      0
     1      1     -1     -1
    -1      0      1      1
    -1     -1      2      1
```

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat also die Inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizienten des Interpolationspolynoms vom Grad höchstens n durch $n+1$ Messpunkte $\boldsymbol{t}$ mit $n+1$ Messwerten $\boldsymbol{s}$ werden in MATLAB mit dem Befehl `polyfit(t,s,n)` bestimmt:

```
a=polyfit([1,2,3,4],[2.6,4.6,5.1,2.6],3)
a =
   -0.2500    0.7500    1.5000    0.6000
```

Der erste Zahlenwert ist dabei der Koeffizient von x^n, der zweite der von x^{n-1} usw.

Das Polynom vom Grad 3 mit $P(1) = 2.6$, $P(2) = 4.6$, $P(3) = 5.1$ und $P(4) = 2.6$ ist also

$$P(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^3 + \frac{3}{4} \cdot x^2 + \frac{3}{2} \cdot x + \frac{3}{5}.$$

Teil III

wobei wir auch noch die Definition von Orthonormalbasen ausgenutzt haben. Umgekehrt folgt aber aus dieser Überlegung genauso, dass die Spalten von A eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bilden, wenn $A^\top \cdot A = \mathrm{E}_n$, und daher besitzen orthogonale Matrizen folgende interessante Eigenschaft:

Inverse einer orthogonalen Matrix

Ist A eine orthogonale Matrix, so ist A invertierbar, und

$$A^{-1} = A^\top$$

ist die Transponierte von A. Ist umgekehrt $A^\top$ die inverse Matrix von A, so ist A orthogonal.

Beispiel

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

ist invertierbar mit inverser Matrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$ ◀

Aus der Wälzformel (12.16) in Abschn. 12.2 erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle A \cdot \boldsymbol{v},\, A \cdot \boldsymbol{w} \rangle &= \langle \boldsymbol{v},\, A^\top \cdot A \cdot \boldsymbol{w} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{v},\, A^{-1} \cdot A \cdot \boldsymbol{w} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w} \rangle\,. \end{aligned}$$

Orthogonale Matrizen und Skalarprodukt

Ist A eine orthogonale $n \times n$-Matrix, so gilt

$$\langle A \cdot \boldsymbol{v},\, A \cdot \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w} \rangle \qquad \text{für alle } \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n\,.$$

Ist umgekehrt A eine $n \times n$-Matrix, für die

$$\langle A \cdot \boldsymbol{v},\, A \cdot \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w} \rangle \qquad \text{für alle } \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$$

gilt, so ist A orthogonal.

Orthogonale Matrizen sind im folgenden Sinne verträglich mit dem Betrag auf $\mathbb{R}^n$: Ist A eine orthogonale Matrix und $\boldsymbol{v}$ ein beliebiger Vektor, so gilt

$$|A \cdot \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}|\,.$$

Das folgt sofort aus obiger Aussage, denn damit gilt

$$\begin{aligned} |A \cdot \boldsymbol{v}|^2 &= \langle A \cdot \boldsymbol{v},\, A \cdot \boldsymbol{v} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{v},\, A^\top \cdot A \cdot \boldsymbol{v} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{v} \rangle \\ &= |\boldsymbol{v}|^2\,. \end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen erhalten wir die Behauptung.

Eine Matrix mit $|A \cdot \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}|$ für jeden Vektor $\boldsymbol{v}$ nennen wir auch **lineare Isometrie**. Hierfür gilt dann auch

$$|A \cdot \boldsymbol{v} - A \cdot \boldsymbol{w}| = |A \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})| = |\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}|\,.$$

Isometrien erhalten neben Normen also auch Abstände. Jede orthogonale Matrix ist eine Isometrie.

Drehungen und Spiegelungen in der Ebene sind orthogonal

Wir wollen uns nun speziell mit dem Fall $n = 2$ beschäftigen:

Ist A eine orthogonale 2×2-Matrix, so gibt es ein eindeutig bestimmtes $\alpha \in [0,\, 2\pi)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

oder mit

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Dazu schreiben wir zunächst ganz allgemein

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

mit reellen Zahlen a, b, c und d. Da A eine orthogonale Matrix ist, muss $A^\top \cdot A = \mathrm{E}_2$ gelten, also

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplizieren wir das aus, so ergeben sich die drei Beziehungen

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 \\ ac + bd &= 0 \\ c^2 + d^2 &= 1\,. \end{aligned}$$

Die erste Beziehung besagt, dass $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ein Vektor der Länge 1 ist. Schreiben wir also $\boldsymbol{v}$ in Polarkoordinaten, so bedeutet das, dass es genau ein $\alpha \in [0,\, 2\pi)$ gibt mit

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix},$$

also $a = \cos(\alpha)$ und $b = \sin(\alpha)$. Genauso finden wir aus der dritten Beziehung ein β mit $c = \sin(\beta)$ und $d = \cos(\beta)$.

Setzen wir diese Resultate in die zweite Beziehung ein und nutzen auch noch die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus aus, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \\ &= \sin(\alpha + \beta)\,. \end{aligned}$$

Da $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$, kann das nur dann der Fall sein, wenn

$$\alpha + \beta \in \{0, \pi, 2\pi, 3\pi\}\,.$$

Falls nun $\alpha + \beta = 0$ oder $\alpha + \beta = 2\pi$, so gilt

$$\sin(\beta) = -\sin(\alpha), \quad \cos(\beta) = \cos(\alpha)\,,$$

und wir erhalten

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Ist dagegen $\alpha + \beta = \pi$ oder $\alpha + \beta = 3\pi$, so gilt

$$\sin(\beta) = \sin(\alpha), \quad \cos(\beta) = -\cos(\alpha)\,,$$

und wir erhalten in diesem Fall

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Die orthogonale Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

beschreibt eine **Drehung** um den Winkel α, und wir schreiben hierfür auch D_α. Ist etwa $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (also $\alpha = 60°$ im Winkelmaß), so ist

$$A = D_{60°} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

wie in Abb. 13.10 dargestellt.

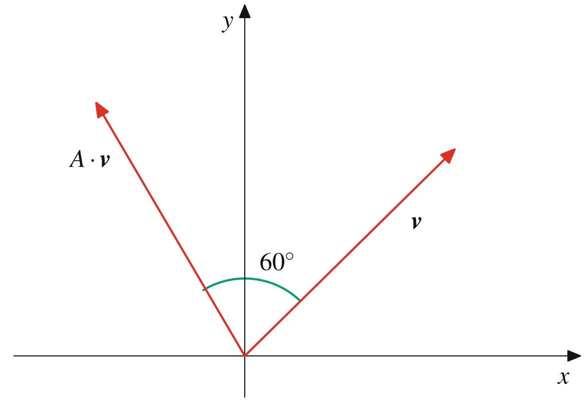

Abb. 13.10 Drehung um 60°

Die orthogonale Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

dagegen beschreibt eine **Spiegelung** an der Geraden mit Winkel $\frac{\alpha}{2}$ zur x-Achse, und wir schreiben hierfür $S_{\frac{\alpha}{2}}$. Ist wieder $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (also $\alpha = 60°$ im Winkelmaß), so ist

$$S_{30°} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Das ergibt die Darstellung in Abb. 13.11 (mit Spiegelungsachse S), wobei β der Winkel von v mit der Spiegelachse ist.

Determinanten von Drehungen und Spiegelungen

Für jeden Winkel α gilt

$$\det(D_\alpha) = 1, \quad \det(S_\alpha) = -1\,.$$

Die Multiplikation komplexer Zahlen kann sehr gut mit Drehungen und Streckungen beschrieben werden. Ist eine komplexe

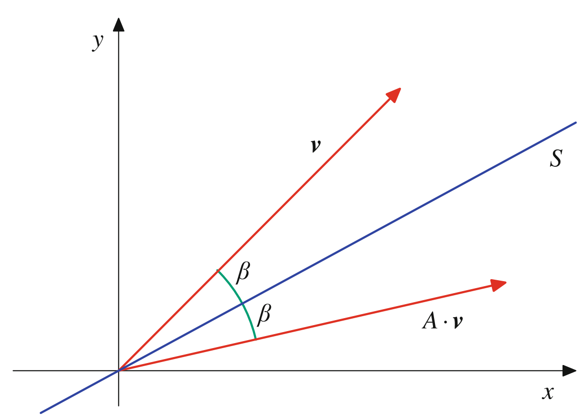

Abb. 13.11 Spiegelung an einer Achse

Zahl z in Polarkoordinatendarstellung durch die Länge r und den Winkel α gegeben, so ist die Multiplikation mit z eine Drehstreckung mit Winkel α und Streckfaktor r, schreibt sich also in Matrizenschreibweise als Multiplikation mit der Matrix

$$\mu_z = r \cdot D_\alpha = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Sehr viel schwieriger zu verstehen als der Fall $n = 2$ ist der Fall $n = 3$. Einige orthogonale Matrizen können wir aber auch in diesem Fall angeben:

Wir betrachten eine Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ durch den Koordinatenursprung (also einen zweidimensionalen Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$) und seinen Normalenvektor $\boldsymbol{n}_E$. Der Untervektorraum $V = \mathbb{R} \cdot \boldsymbol{n}_E$ ist dann das orthogonale Komplement von E. Wir betrachten nun eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Es ist $f(E) \subset E$, und die Einschränkung $f|_E$ von f auf E ist eine Drehung von E um den Winkel α (für ein $\alpha \in [0, 2\pi)$).
2. $f(\boldsymbol{n}_E) = \boldsymbol{n}_E$.

Eine solche lineare Abbildung existiert und ist durch diese Eigenschaften bereits eindeutig beschrieben. Sie hält die durch $\boldsymbol{n}_E$ definierte Drehachse D fest und dreht die Ebene E um diese Drehachse um den Winkel α (Abb. 13.12).

Die Matrix A, die diese Abbildung f beschreibt, ist eine orthogonale Matrix.

Die Matrix der linearen Abbildung, die die x-y-Ebene um 45° dreht und die z-Achse nicht verändert, ist also orthogonal. Es handelt sich dabei um die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Anstelle einer Drehung von E könnten wir für $f|_E$ auch eine Spiegelung an einer Achse wählen, und wir hätten auch $f(\boldsymbol{n}_E) = -\boldsymbol{n}_E$ fordern können und ebenfalls eine orthogonale Matrix erhalten.

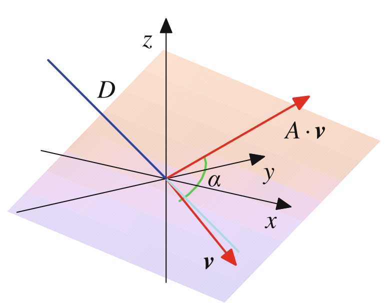

Abb. 13.12 Drehung im Raum um ein Drehachse

Wir werden in Abschn. 14.2 noch sehen, dass jede orthogonale 3×3-Matrix von einer dieser linearen Abbildungen herkommt.

Etwas anders ist die Situation in komplexen Vektorräumen. Auf dem komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^n$ haben wir das Skalarprodukt definiert durch

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \sum_{k=1}^{n} v_k \cdot \overline{w_k}$$

und damit auch Orthonormalbasen des $\mathbb{C}^n$ erklärt.

Definition

Eine komplexe $n \times n$-Matrix U heißt **unitär**, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$ bilden.

Beispiel

Die Matrix

$$U = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ist unitär. ◀

Inverse einer unitären Matrix

Ist U unitär, so ist U invertierbar mit

$$U^{-1} = \overline{U}^\top.$$

wobei $\overline{U}$ die zu U komplex konjugierte Matrix bezeichnet. Ist umgekehrt $\overline{U}^\top$ die inverse Matrix von U, so ist U unitär.

Beispiel

Die Matrix

$$U = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

hat die inverse Matrix

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$ ◀

Teil III

13.4 Mathematischer Hintergrund: Lokale Koordinatensysteme und homogene Koordinaten

Technische und industrielle Anwendungen werden sehr oft durch lineare Abbildungen, speziell durch Drehbewegungen, beschrieben (etwa die Bewegung eines Kranarmes oder eines Robotergelenks), also durch eine orthogonale Matrix, wenn das Drehgelenk im Koordinatenursprung zu liegen kommt. Dann tritt jedoch das Problem auf, dass ein technisches Gerät üblicherweise aus mehreren drehenden Teilen besteht, die Drehgelenke an unterschiedlichen Stellen haben (**kinematische Ketten**). Eine Baggerschaufel etwa wird über drei Drehgelenke gesteuert, die durch Werkstücke miteinander verbunden sind. Dadurch werden also unterschiedliche (lokale) Koordinatensysteme bestimmt (Abb. 13.13).

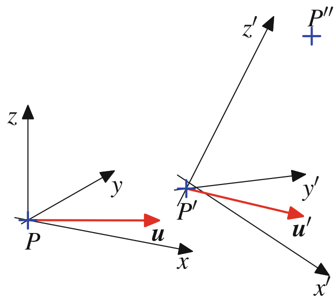

Abb. 13.13 Lokale Koordinatensysteme

Während diese lokalen Koordinaten optimal für die Führung einer einzelnen Drehbewegung sind, ist es natürlich essenziell, den Bewegungsablauf des Geräts auch global beschreiben zu können und speziell die Position und die Ausrichtung des eingesetzten Werkzeugs nicht nur bzgl. des letzten Gelenks und des letzten Koordinatensystems, sondern auch in globalen Größen zu kennen. Wir wollen hier das Drehgelenk P mit Koordinaten x, y, z und das Nachfolgegelenk P' mit Koordinaten x', y', z' betrachten, wobei wir annehmen, dass beide Koordinatensysteme durch eine Orthonormalbasis $\boldsymbol{o}_1, \boldsymbol{o}_2, \boldsymbol{o}_3$, bzw. $\boldsymbol{o}'_1, \boldsymbol{o}'_2, \boldsymbol{o}'_3$ bestimmt werden. Daher gibt es eine orthogonale 3×3-Basiswechselmatrix $A = (a_{i,j})$, sodass ein Vektor $\boldsymbol{v}'$ bzgl. der Basis $\boldsymbol{o}'_1, \boldsymbol{o}'_2, \boldsymbol{o}'_3$ durch $A \cdot \boldsymbol{v}'$ bzgl. $\boldsymbol{o}_1, \boldsymbol{o}_2, \boldsymbol{o}_3$ dargestellt wird. Diese Darstellung funktioniert aber nicht für Punkte, da die beiden Koordinatensysteme nicht denselben Koordinatenursprung haben. Ist $P'' = (p''_1, p''_2, p''_3)$ ein Punkt, dargestellt mit (x', y', z')-Koordinaten, und schreibt sich der Koordinatenursprung P' des zweiten Koordinatensystems als $P' = (p'_1, p'_2, p'_3)$ in (x, y, z)-Koordinaten, so ist der Ortsvektor $\boldsymbol{r}(P'')$ von P'' in (x, y, z)-Koordinaten gegeben durch

$$\boldsymbol{r}(P'') = \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} p''_1 \\ p''_2 \\ p''_3 \end{pmatrix} .$$

Die unterschiedliche Behandlung von Punkten und Vektoren macht die Behandlung kinematischer Ketten zunächst sehr schwierig. Um dieses Problem zu beheben, gehen wir über zu sog. homogenen Koordinaten, d. h., wir führen eine vierte Koordinate ein (oder genauer gesagt eine nullte, denn sie wird vor den anderen stehen), die wir einheitlich bei Punkten auf 1 und bei Vektoren auf 0 setzen, also

$$\boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} 0 \\ v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}(Q') = \begin{pmatrix} 1 \\ q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \end{pmatrix} .$$

Mit der Umrechnungsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p'_1 & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ p'_2 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ p'_3 & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

erfolgt nun die Koordinatentransformation von (x', y', z') mit Koordinatenursprung P' auf (x, y, z) mit Koordinatenursprung P einheitlich durch $T \cdot \boldsymbol{w}'$, egal, ob $\boldsymbol{w}'$ ein Vektor ist oder von einem Punkt kommt.

Die Umrechnung von (x, y, z)-Koordinaten (mit Ursprung P) in (x', y', z')-Koordinaten (mit Ursprung P') erfolgt nach dem gleichen Grundprinzip. Da wir mit Orthonormalbasen arbeiten, lässt sich die Umrechnungsmatrix in diesem Fall jedoch sofort angeben. Sie ist gegeben durch

$$T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{1,1}p'_1 - a_{2,1}p'_2 - a_{3,1}p'_3 & a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ -a_{1,2}p'_1 - a_{2,2}p'_2 - a_{3,2}p'_3 & a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ -a_{1,3}p'_1 - a_{2,3}p'_2 - a_{3,3}p'_3 & a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix},$$

da die Rückrechnung der Vektorkoordinaten aufgrund der Orthogonalität von A durch $A^\top$ realisiert wird und da der Punkt P aus Sicht von P' durch das Negative des Ortsvektors $\boldsymbol{r}(P)$ (umgerechnet in (x', y', z')-Koordinaten) gegeben ist.

Mithilfe homogener Koordinaten können also lokale Koordinatensysteme einfach ineinander umgerechnet werden. Durch Auszeichnung eines lokalen Koordinatensystems als Bezugssystem ist es daher möglich, alle Größen auch global anzugeben.

13.5 Mathematischer Hintergrund: Programmierung von Industrierobotern

Industrieroboter bestehen aus einer Anzahl von Drehgelenken, über die der Endeffektor, also das durch den Roboter geführte Werkzeug, gesteuert wird. Da für die Funktionsfähigkeit des Endeffektors dessen Position (mit drei Positionskoordinaten) und Ausrichtung (mit drei Richtungswinkeln), also insgesamt sechs Koordinaten, eingestellt werden müssen, hat sich die Anzahl von sechs Drehgelenken als zweckmäßig erwiesen (Abb. 13.14).

Abb. 13.14 Ein Roboterarm (©Patrick P. Palej/Fotolia)

Die Drehbewegung in einem einzelnen Gelenk wird am besten dadurch beschrieben, dass wir ein lokales Koordinatensystem in das Drehgelenk legen und die definierende Orthonormalbasis so bestimmen, dass die z-Achse mit der Drehachse übereinstimmt, um die der Dreharm (den wir uns als Vektor $\boldsymbol{u}$ vorstellen können) gedreht wird. Dadurch erhalten wir jetzt pro Drehgelenk ein lokales Koordinatensystem (insgesamt also sechs bei gängigen Industrierobotern), die aber alle miteinander verbunden sind, da das Ende des Dreharmes $\boldsymbol{u}$ mit dem Drehgelenk P' des nachfolgenden Dreharmes durch ein Werksteil verbunden ist. Auch hier ist es natürlich notwendig, die Position und Ausrichtung des Endeffektors in globalen Koordinaten zu beschreiben. Dazu nutzen wir die Erkenntnisse in Mathematischer Hintergrund 13.4 und betrachten zunächst zwei Drehgelenke, beschrieben durch lokale Koordinaten (x, y, z) mit Ursprung P und (x', y', z') mit Urspung P'.

Wird nun der Dreharm $\boldsymbol{u}'$ (im Koordinatensystem x', y', z') um den Winkel α_2 gedreht, so schreibt sich diese Drehung in homogenen Koordinaten durch

$$D_2(\alpha_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_2) & -\sin(\alpha_2) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_2) & \cos(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Beachten Sie dabei, dass wir die Koordinatenachsen so gewählt haben, dass die z'-Achse die Drehachse ist.) Ein beliebiger Vektor $\boldsymbol{v}'$ und ein beliebiger Punkt Q' mit Ortsvektor $\boldsymbol{r}(Q')$ (immer noch bzgl. der (x', y', z')-Koordinaten mit P' als Koordinatenursprung) gehen also nach dieser Drehung über in $D_2 \cdot \boldsymbol{v}'$ bzw. $D_2 \cdot \boldsymbol{r}(Q')$, und die Umrechung in die (x, y, z)-Koordinaten erfolgt durch $T_1 \cdot D_2(\alpha_2) \cdot \boldsymbol{v}'$ bzw. $T_1 \cdot D_2(\alpha_2) \cdot \boldsymbol{r}(Q')$, wobei T_1 die Umrechnungsmatrix aus Mathematischer Hintergrund 13.4 ist.

Wird dagegen der Dreharm $\boldsymbol{u}$ (im Koordinatensystem x, y, z) um den Winkel α_1 gedreht, so schreibt sich diese Drehung in homogenen Koordinaten durch

$$D_1(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_1) & -\sin(\alpha_1) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vektoren $\boldsymbol{v}'$ und Punkte Q' mit Ortsvektor $\boldsymbol{r}(Q')$ bzgl. der (x', y', z')-Koordinaten mit P' als Koordinatenursprung gehen also nach dieser Drehung und Umrechung in die (x, y, z)-Koordinaten über in $D_1(\alpha_1) \cdot T_1 \cdot \boldsymbol{v}'$ bzw. in $D_1(\alpha_1) \cdot T_1 \cdot \boldsymbol{r}(Q')$. Setzen wir $T_1(\alpha_1) = D_1(\alpha_1) \cdot T_1$, so wird die Transformation von (x', y', z')-Koordinaten bzgl. P' nach Drehung des Dreharmes $\boldsymbol{u}$ um α_1 in die (x, y, z)-Koordinaten bzgl. P gegeben durch $T_1(\alpha_1)$, und eine Vektor $\boldsymbol{v}$ in (x', y', z')-Koordinaten wird nach Drehung des zweiten Dreharmes um α_2 und des ersten Dreharmes um α_1 in den Koordinaten des ersten Systems beschrieben durch

$$\boldsymbol{w} = T_1(\alpha_1) \cdot D_2(\alpha_2) \cdot \boldsymbol{v}.$$

Die Kombination der Drehungen der sechs Dreharme ist dann (in globalen Koordinaten) bestimmt durch eine Transformationsmatrix

$$T_1(\alpha_1) \cdot T_2(\alpha_2) \cdot T_3(\alpha_3) \cdot T_4(\alpha_4) \cdot T_4(\alpha_5) \cdot T_6(\alpha_6).$$

Die Darstellung der Transformation kann durch eine geschickte Wahl der Koordinaten (und einen weiteren Zwischenschritt) noch vereinfacht werden (**Denavit-Hartenberg-Konvention**). Für die Vorwärtsrechnung, also die Bestimmung der Positions- und Richtungskoordinaten des Endeffektors aus den Drehwinkeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$, ist das weniger relevant; wichtig bei der Programmierung von Industrierobotern ist jedoch die Rückwärtsrechnung, also die Bestimmung der Winkel $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ aus den gewünschten Koordinaten des Endeffektors. Das erfolgt meist numerisch und erfordert größtmögliche Vereinfachung (Siegert und Bocionek, 1996).

Literatur

H.-J. Siegert, S. Bocionek: *Robotik, Programmierung intelligenter Roboter*. Springer, Heidelberg, 1996.

Teil III

Aufgaben

13.1 Berechnen Sie $\det(A_l)$ für

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

13.2 Rechnen Sie nach, dass für zwei 2×2-Matrizen A und B gilt:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B\,.$$

13.3 Berechnen Sie $\det A$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Benutzen Sie die cramersche Regel, um die Lösung von

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen.

13.4 Berechnen Sie $\det A$ für $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Hat das Gleichungssystem

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

eine eindeutige Lösung?

13.5 Berechnen Sie $\det A$ für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & a \end{pmatrix}$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ und bestimmen Sie alle a, für die das Gleichungssystem

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

eine eindeutige Lösung für jeden Vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ hat.

13.6 Zeigen Sie: Ist $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ eine 2×2-Matrix, so gilt genau dann $a_{1,1} = 0$ oder $a_{2,2} = 0$, wenn

$$\det A = -a_{1,2}a_{2,1}\,.$$

13.7 Zeigen Sie: Genau dann sind die beiden Zeilen einer 2×2-Matrix A kollinear, wenn $\det A = 0$.

13.8 Berechnen Sie die Determinante der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

13.9 Bestimmen Sie die Streichungsmatrizen $A_{1,1}, A_{1,2}, A_{1,3}, A_{2,1}, A_{2,2}$ und $A_{2,3}$ von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinanten dieser Streichungsmatrizen und die Determinante von A.

13.10 Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob das Gleichungssystem

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

für jede Wahl von $\boldsymbol{b}$ eine eindeutige Lösung besitzt.

13.11 Betrachten Sie die 3×3-Matrix $A = (a_{i,j})$ mit

$$a_{1,1} = a_{1,2} = a_{2,1} = 0\,.$$

Zeigen Sie

$$\det A = -a_{1,3} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,1}\,.$$

13.12 Zeigen Sie, dass für eine 3×3-Matrix genau dann $\det A = 0$ ist, wenn die Spaltenvektoren von A komplanar sind.

13.13 Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 7 & 9 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

13.14 Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & 6 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

13.15 Zeigen Sie: Ist A eine $n \times n$-Matrix, die sich in der Form

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

mit einer $n_1 \times n_1$-Matrix B, einer $n_1 \times (n-n_1)$-Matrix C und einer $(n-n_1) \times (n-n_1)$-Matix D (sowie einer $(n-n_1) \times n_1$-Nullmatrix 0) schreiben lässt, so gilt

$$\det A = \det B \cdot \det C\,.$$

13.16 Berechnen Sie die Komplementärmatrizen zu den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

13.17 Für reelle Zahlen $r_1, \ldots, r_n$ ($n \geq 2$) definieren wir die $n \times n$-Matrix (Vandermonde-Matrix)

$$V(r_1, \ldots, r_n) = \begin{pmatrix} 1 & r_1 & r_1^2 & \ldots & r_1^{n-1} \\ 1 & r_2 & r_2^2 & \ldots & r_2^{n-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 1 & r_n & r_n^2 & \ldots & r_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie: $\det\left(V(r_1, \ldots, r_n)\right) = \prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} (r_j - r_i)$.

13.18 Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

13.19 Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

13.20 Überprüfen Sie, ob die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und bestimmen Sie ggf. die inverse Matrix.

13.21 Zeigen Sie, dass eine $n \times n$-Matrix A genau dann invertierbar ist, wenn ihre Spaltenvektoren eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden.

13.22 Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal?

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & -\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

13.23 Wir betrachten die Ebene (durch den Koordinatenursprung), die erzeugt wird von den beiden Vektoren $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die orthogonale Matrix, die zu der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gehört, die die Elemente von E nicht verändert (also E um 0° dreht) und die den Normalenvektor $\boldsymbol{n}_E$ von E auf $-\boldsymbol{n}_E$ abbildet.

13.24 Zeigen Sie: Ist A eine orthogonale Matrix, so gilt

$$\det A = \pm 1\,.$$

13.25 Zeigen Sie, dass das Produkt von zwei orthogonalen Matrizen wieder orthogonal ist.

13.26 Zeigen Sie: Ist U eine unitäre Matrix, so gilt

$$|\det U| = 1\,.$$

Geben Sie ein Beispiel einer unitären Matrix U an, bei der weder $\det U = 1$ noch $\det U = -1$ gilt.

Teil III